Noções de Bioestatística

Luis Guillermo Coca Velarde, D.Sc.
Departamento de Estatística
E-mail: guilleco@terra.com.br guille@est.uff.br

Sumário

Prefácio

A utilização da Estatística pelas diversas áreas Biomédicas tem crescido de forma significativa nos últimos anos ao ponto de ter dado origem ao termo Bioestatística. Assim, toda pesquisa científica nessa área apresenta o cálculo de uma média, um gráfico, o resultado de um teste ou outra ferramenta estatística adequada para o problema específico.

A própria Estatística tem se desenvolvido a passos agigantados ao ponto de muitos dos recentes avanços ainda não serem conhecidos pelos profissionais da área Biomédica, o que sugere a necessidade de uma interação constante com os estatísticos.

A interação mencionada anteriormente exige uma compreensão dos conceitos básicos da Bioestatística de forma a facilitar a troca de informação com os estatísticos, o que resultará num melhor planejamento da pesquisa e uma melhor utilização dos dados coletados.

O presente trabalho nasceu a partir das anotações de aula das disciplinas *Estatística I* e *Estatística Aplicada às Ciências Médicas* com a intenção de apresentar as ferramentas básicas da Bioestatística aos alunos dos cursos de graduação e pós-graduação em áreas das Ciências Biomédicas da Universidade Federal Fluminense, especificamente para os alunos da Faculdade de Nutrição e para os alunos do Curso de Pós-Graduação em Ciências Médicas.

O primeiro capítulo apresenta as idéias básicas envolvidas numa pesquisa como população, tipo de estudo, dados, entre outros. A seguir são apresentadas as ferramentas usadas para o resumo inicial dos dados. Posteriormente, são mostrados os elementos básicos da teoria de probabilidades, incluindo algumas aplicações. Finalmente, os três últimos capítulos tratam da inferência estatística, apresentando os conceitos básicos e os testes mais usados.

É necessário mencionar que a intenção deste trabalho não é entrar nos detalhes da teoria Estatística envolvida por trás das ferramentas apresentadas, contudo, não podemos esquecer que ela é indispensável para que as decisões baseadas em resultados estatísticos sejam as mais confiáveis possíveis.

Várias pessoas contribuíram para a elaboração deste texto. Os alunos a quem eu dei aulas desde 1998 na UFF sempre solicitaram este tipo de auxilio e por isto serviram como motivação. Diversos monitores, alunos do curso de Nutrição, trabalharam comigo e ajudaram a criar ou compilar os exemplos e exercícios desta apostila. Em especial, as monitoras Cristine e

Mariá ajudaram a preparar a lista de respostas dos exercícios. Devo agradecer de forma muito especial à minha querida esposa Luciana por ter revisado o texto e admitir que, se existir algum erro, é por causa da minha teimosia, ou simplesmente, passou...

O Autor

Capítulo 1

Conceitos iniciais

Diariamente, os meios de comunicação apresentam informações estatísticas provenientes de pesquisas científicas, porém, diversos graus de confiabilidade devem ser atribuídos a essas estatísticas, já que existem diversos fatores que não são incluídos nos relatórios lidos pela população.

A palavra *pesquisa* tem uma conotação poderosa, ficando implícita a confiabilidade dos resultados apresentados por ela. Sendo assim, poucas pessoas que não estão envolvidas com a pesquisa estão interessadas com os detalhes dela, importando-se apenas com os resultados finais.

Por outro lado, pode se assumir que é possível replicar qualquer pesquisa em igualdade de condições, questionando se os resultados obtidos seriam os mesmos em cada uma das replicações. Pelo exposto anteriormente, toda pesquisa apresenta um ingrediente que foge do controle dos envolvidos e que pode ser chamado de *incerteza*. A análise estatística permite colocar limites a esta incerteza.

Nas pesquisas em ciências biomédicas, geralmente são coletados dados de alguns indivíduos para fazer afirmações sobre grupos maiores, sem interesse particular nesses indivíduos. Então, a informação proveniente de amostras de indivíduos é utilizada para fazer inferência sobre uma população que contém esses mesmos indivíduos. Dessa forma, os conceitos de *amostra* e *população* estão ligados com a pesquisa que está sendo desenvolvida. Em algumas situações, geralmente de interesse governamental, é necessária a observação das características de interesse em todos os indivíduos que formam uma população. Isto constitui um *censo*.

A Estatística aparece nas diversas áreas que um profissional da área de Ciências da Vida pode atuar. Por exemplo, a distribuição Normal padrão, que será vista posteriormente, é utilizada para determinar o estado nutricional de crianças. Os modelos de regressão são utilizados para avaliar e quantificar a influência de fatores socioeconômicos e biológicos sobre algumas variáveis de interesse como peso ao nascer, estado nutricional, nível de albumina, entre outros.

De forma geral, uma população é um conjunto de indivíduos que apresentam uma característica de interesse. Uma amostra é qualquer subconjunto de indivíduos de uma população.

Para realizar uma pesquisa que leve a fazer afirmações sobre a população de interesse é necessário seguir os seguintes passos:

1. Planejamento e desenho

2. Execução (coleta de dados)

3. Processamento de dados

4. Análise de dados

5. Interpretação, apresentação e publicação de resultados

O primeiro passo desta lista será abordado superficialmente a seguir, assim como algumas ideias de amostragem e tipos de variáveis.

1.1 Planejamento de uma pesquisa

É necessário apresentar as diversas formas que se pode realizar um trabalho científico com a finalidade de obter os resultados apropriados ao interesse da pesquisa de forma adequada. Estes estudos serão apresentados de forma a mostrar suas principais características.

1.1.1 Estudos observacionais e experimentais

Em um estudo observacional, o pesquisador coleta a informação sobre os atributos ou faz as medições necessárias, mas não influência as unidades amostrais. Por exemplo, quando se pretende determinar o estado nutricional de uma certa população.

Em um estudo experimental, o pesquisador deliberadamente influencia os indivíduos e pesquisa o efeito da intervenção. Estudos em que se pretende conhecer o efeito de uma nova dieta sobre a rapidez em aumentar os níveis de cálcio são exemplos de estudos experimentais.

De forma geral, inferências mais fortes são obtidas de estudos experimentais porque estes pressupõem um maior controle das unidades amostrais.

1.1.2 Estudos prospectivos e retrospectivos

Existe uma clara diferença entre estudos prospectivos e retrospectivos. Os estudos prospectivos são utilizados quando se pretende conhecer o efeito de algum fator, sendo os dados gerados a partir do início do estudo. Já os estudos retrospectivos são utilizados quando se conhece o efeito de algum fator, sendo os dados referentes a eventos passados e obtidos de recursos já existentes como prontuários. Nos retrospectivos, geralmente já se conhece o efeito e quer se identificar qual foi a causa, o fator gerador do efeito estudado.

O efeito de uma nova dieta precisaria ser estudado através de um estudo prospectivo, enquanto que os fatores que levam à obesidade mórbida serão estudados mediante um estudo retrospectivo. No primeiro são recrutados voluntários que irão fazer a dieta e no segundo são levantados os prontuários de sujeitos com obesidade mórbida para estudar seu histórico médico.

1.1.3 Estudos longitudinais e de corte transversal

Estudos longitudinais são aqueles que estudam mudanças ao longo do tempo, possivelmente com relação a uma intervenção ou característica. Ensaios clínicos são exemplos de estudos longitudinais porque eles estudam o efeito de um fator, comparando medições efetuadas em, pelo menos, duas oportunidades.

Estudos transversais são aqueles em que grupos de indivíduos são observados uma única vez, com a intenção de estudar a situação naquele instante em que são feitas as observações.

1.1.4 Estudos de caso-controle e coorte

Estudo caso-controle é uma forma de pesquisa que visa verificar se indivíduos que foram selecionados porque têm uma característica ou doença, chamados de *casos*, diferem significativamente de um grupo de indivíduos comparáveis, mas que não possuem a característica ou doença, os *controles,* em relação à exposição a um dado fator de risco. Um exemplo deste tipo de estudo ocorre quando se avalia o efeito de um determinado composto químico administrado em comprimidos sobre o número de cigarros fumados diariamente; para isto, é necessário um grupo de fumantes que receba o composto e outro grupo de fumantes que receba um *placebo*.

No estudo de coorte se identifica um grupo de indivíduos de interesse e se faz um seguimento dos mesmos, até um certo momento, para estudar o seu desfecho. Este tipo de estudo pode levar muito tempo e, por este motivo, não é aplicado no estudo de eventos raros.

1.2 Amostragem

A impossibilidade de observar todos os indivíduos de uma população justifica o estudo de técnicas de amostragem. Porém, uma amostra deve ser coletada de forma que reproduza as características da população a qual foi obtida.

Uma forma de garantir a representatividade de uma amostra é selecionando-a de forma aleatória.

Dependendo das características da populção é possível identificar um esquema de amostragem para ela. Os esquemas mais adotados estão enumerados a seguir:

1. Amostragem simples aleatória.
2. Amostragem estratificada.
3. Amostragem por conglomerados.
4. Amostragem sistemática.

Do ponto de vista estatístico, uma amostra deve estar constituída pelo maior número possível de observações. A teoria de amostragem define procedimentos para calcular o *tamanho de amostra* necessário para atingir um certo grau de precisão. Em muitas situações este tamanho de amostra é um valor que, sendo o ideal, está fora das possibilidades da pesquisa devido a diversos fatores como tempo ou dinheiro; assim, é necessário desenvolver um estudo específico que leve em consideração a teoria estatística e as possibilidades reais da pesquisa.

1.3 Tipos de dados

Para qualquer estudo e sob qualquer esquema de amostragem, as informações necessárias serão obtidas a partir de um conjunto de dados. Estes dados podem ser classificados em dois grandes grupos: *categóricos* e *numéricos*, e a natureza deles leva à escolha certa de métodos estatísticos de análise.

1.3.1 Dados categóricos

Dados categóricos ou qualitativos são aqueles cujos valores possíveis são categorias ou características não-numéricas.

Estes dados podem ser divididos em *ordinais* ou *nominais* dependendo da existência ou não de uma ordem entre os valores possíveis. Como exemplo de dados ordinais, tem-se o estágio de uma doença e de dados nominais o sexo de um indivíduo e o tipo sanguíneo.

Os dados ordinais podem ser representados por números, o que não os transforma em dados numéricos. Assim, qualquer análise destes dados precisa ser realizada com muito cuidado, principalmente na hora de interpretar os resultados obtidos destas análises.

Duas categorias

Este tipo de dados categóricos geralmente refere-se à presença ou ausência de algum atributo ou característica. Também recebem os nomes de *variáveis sim/não*, *binárias*, *dicotômicas* ou *0-1*. São exemplos: sexo (homem/mulher), gravidez (sim/não), estado civil (casado/solteiro), tabagismo (fumante/não-fumante), entre outros. Estas variáveis binárias geralmente são classificadas como nominais.

1.3.2 Dados numéricos

Também chamados de quantitativos assumem valores numéricos, podendo ser *discretos* ou *contínuos*.

Os dados discretos resultam de contagens de eventos. Exemplo: número de filhos, número de batimentos cardíacos por minuto.

Os dados contínuos são obtidos de algum tipo de medição: altura, peso, pressão arterial, temperatura corporal.

1.3.3 Outros tipos de dados

Ranks ou postos

Ocasionalmente, os dados representam a posição relativa dos membros de um grupo com relação a algum *ranking*. A posição de um indivíduo neste ranking é chamado de *posto*.

Porcentagens

É necessário ter cuidado quando os dados com os quais se trabalha são porcentagens observadas. Notar que, para uma pressão arterial sistólica (PAS) inicial de 150 mmHg, um aumento de 20% significa que a PAS vai para 180 mmHg e uma diminuição subseqüente de 20% leva a PAS para 144 mmHg.

Escores

São usados quando não é possível fazer medições diretas. Em sua forma mais simples, estes sistemas numéricos classificam uma característica em diversas categorias segundo a opinião de um indivíduo. Por exemplo a dor de um ferimento pode ser classificada como leve, moderada ou severa, podendo ser designado um valor numérico a cada categoria. Deve ser notado que estas escalas são subjetivas.

Dados censurados

Uma observação é chamada censurada se não pode ser medida de forma precisa, mas sabe-se que está além, ou aquém, de um limite. Por exemplo, em alguns experimentos existe um período fixo de acompanhamento, sendo a variável de interesse o tempo para aparecer um sintoma ou desaparecer alguma condição específica. Quando se excede o tempo máximo de acompanhamento se obtém um dado censurado, pois este tem valor que está acima daquele tempo máximo, porém, não se conhece o seu valor preciso.

1.4 Exercícios

1. Apresente uma situação em que seja necessário o uso de um estudo de corte transversal.

2. Dê um exemplo em que seja necessário o uso da amostragem estratificada.

3. Classifique os seguintes dados:

   (a) Estado nutricional de crianças de 5 a 10 anos de idade.

   (b) Tempo para atingir uma perda de peso de 5%.

   (c) Número de horas de estudo para uma prova de estatística.

   (d) Níveis de calorias consumidos diariamente.

   (e) Ocorrência de hipertensão pré-natal em grávidas com mais de 35 anos (*sim* e *não* são possíveis respostas para a variável).

   (f) Perda de peso de maratonistas, em quilos.

4. É de interesse estudar o tempo que uma pessoa, diagnosticada com doença grave, consegue sobreviver com o uso de uma determinada droga experimental. Qual é o tipo de estudo necessário para esta situação? Descreva o experimento a ser realizado.

5. Oitenta crianças matriculadas em uma escola municipal de Niterói participaram de um estudo sobre fatores associados à obesidade infantil. Foram aferidas a altura e a massa corporal, foi perguntada a idade e os responsáveis preencheram um questionário contendo informação sobre a família e fatores socioeconômicos. Qual foi o tipo de estudo realizado na pesquisa?

6. Descreva uma situação em que podem aparecer dados censurados, definindo a variável que apresenta estes dados e as condições para tal.

Capítulo 2

Organização de dados

Quando se estuda uma variável, o primeiro interesse do pesquisador é conhecer a distribuição dessa variável através das possíveis realizações (valores) da mesma. O objetivo por trás disto é obter informação que não poderia ser observada através da inspeção visual dos dados. Porém, a informação fornecida pelos dados pode ser apresentada de várias formas: usando tabelas, gráficos ou, inclusive, medidas representativas de dados ou variáveis. Em resumo, os dados precisam ser organizados.

2.1 Distribuição de frequências

Os dados brutos podem não ser práticos para responder a questões de interesse, então, é necessário resumi-los e para isto se faz necessário definir alguns conceitos:

- **Frequência absoluta** é o número de vezes que uma determinada característica ou valor numérico é observada.

- **Frequência relativa** é a proporção, do total, em que é observada uma determinada característica. Sob determinadas condições, as frequências relativas podem ser usadas para estimar quantidades importantes como por exemplo, em epidemiologia, a prevalência, incidência, coeficientes de mortalidade e natalidade; em testes clínicos de diagnóstico se tem sensibilidade, especificidade, valor preditivo positivo e valor preditivo negativo. Este conceito está associado com a definição clássica de probabilidade.

- **Frequência acumulada**: para um determinado valor numérico ou dado ordinal, é a soma das frequências dos valores menores ou iguais ao referido valor.

Dados este conceitos, é possível resumir um conjunto de dados através das tabelas de distribuições de frequências.

2.1.1 Distribuição de frequências não-agrupadas

Este tipo de distribuição é utilizada quando o número de valores possíveis da variável em estudo é reduzido. Serve para representar variáveis categóricas e, em alguns casos, numéricas.

A disribuição de frequências não-agrupadas é representada em uma tabela que contém, pelo menos duas colunas:

1. Listagem de todos os possíveis valores da variável.

2. Frequências associadas aos valores da variável em estudo.

Exemplo: Em uma escola do município de Niterói, foram avaliadas 145 crianças com idade entre 6 e 10 anos, calculando-se o estado nutricional segundo os critérios da OMS. Para estas crianças, as tabelas de distribuição de frequências das variáveis *estado nutricional* e *idade* aparecem a seguir:

Categoria	f	fr
Baixo peso	11	0,08
Normal	105	0,72
Sobrepeso	25	0,17
Obeso	4	0,03
	145	1,00

Idade	f	fr	F	Fr
6	16	0,11	16	0,11
7	39	0,27	55	0,38
8	23	0,16	78	0,54
9	28	0,19	106	0,73
10	39	0,27	145	1,00
	145	1,00		

Onde f é a frequência absoluta, fr é a frequência relativa, F é a frequência absoluta acumulada e Fr é a frequência relativa acumulada.

2.1.2 Distribuição de frequências agrupadas

A distribuição de frequências agrupadas é utilizada para variáveis numéricas contínuas, ou quando existem muitos valores possíveis para uma variável discreta. O procedimento de construção da tabela é simples mas tedioso tendo como idéia básica criar intervalos, ou classes, para a variável em estudo e calcular as frequências para esses intervalos. Os dados de idade de vítimas fatais em acidentes de trânsito na Inglaterra na década de 70, que aparecem nas tabelas 2.1 e 2.2, serão usados como exemplo. Nestes dados é fácil perceber a dificuldade de apontar qualquer característica geral da situação em estudo devido ao grande volume de *números* existentes.

1,7	3,6	3,5	1,0	2,5	30,5	36,7	57,2	38,2	53,7	0,7	3,6
0,5	4,0	2,2	35,2	28,2	33,6	46,6	51,7	1,8	0,7	1,8	1,9
0,2	58,6	26,5	56,0	42,1	42,1	2,5	2,6	0,3	2,7	1,5	27,3
36,0	42,6	58,9	40,2	3,2	1,4	0,8	3,4	2,5	48,5	56,3	45,8
34,5	59,0	2,3	0,3	3,2	5,1	6,5	29,8	45,1	44,0	55,5	26,4
5,2	8,5	7,1	7,0	6,2	38,6	48,0	53,2	44,9	45,2	7,7	8,3
8,2	8,2	7,7	56,2	40,1	36,0	30,8	30,6	5,3	7,4	6,0	5,6
7,1	53,2	29,9	55,0	28,5	34,8	8,5	8,6	8,4	5,1	7,3	46,8
50,7	49,8	42,8	45,3	5,6	8,9	8,6	5,4	7,9	53,6	43,3	38,7
34,5	39,9	8,7	8,3	8,4	6,2	5,4	55,6	30,3	34,4	43,9	37,9
31,8	37,8	48,8	35,8	32,7	7,9	6,2	6,5	7,1	6,4	6,5	8,3
5,8	5,8	5,5	44,8	42,2	46,5	36,8	55,0	5,4	6,2	7,1	5,5
13,4	42,9	26,9	44,1	56,0	25,3	12,1	13,1	13,8	10,7	10,2	39,8
40,1	53,4	38,1	36,1	12,3	13,8	13,4	13,6	12,4	45,3	46,0	41,0
49,6	27,3	14,6	14,2	12,1	13,6	14,1	53,3	47,9	35,6	51,9	31,8
10,7	12,6	14,4	10,2	10,7	50,0	48,6	34,1	50,1	38,2	14,5	12,9
12,1	14,7	10,7	56,4	49,5	37,6	28,2	50,3	14,6	11,1	10,4	10,4
13,1	51,7	28,7	39,2	45,5	57,9	10,3	14,6	13,7	11,0	14,8	57,2
51,5	31,6	30,4	58,7	12,9	13,6	10,6	14,4	14,7	35,9	27,9	43,4
30,8	46,6	10,9	10,9	13,0	10,9	10,1	12,7	10,7	51,6	46,3	25,9
15,0	13,0	12,0	14,7	10,7	14,6	10,2	51,0	39,8	39,1	12,2	12,2
12,5	16,0	16,0	16,0	16,0	33,1	49,2	58,9	16,0	16,0	16,0	16,0
16,0	16,0	16,0	25,3	34,6	32,4	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0
16,0	46,6	35,0	79,1	16,0	16,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	33,9
44,0	67,4	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	58,9	39,6	75,2
17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	43,8	49,0	63,7	17,0	17,0
17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	46,1	35,5	68,2	17,0	17,0	17,0	17,0
17,0	19,6	19,4	34,4	53,9	77,8	18,6	19,4	19,2	19,0	18,6	20,0
18,6	55,3	27,6	75,4	18,5	18,4	19,0	18,0	19,0	19,4	18,1	33,3
37,7	73,0	18,9	19,2	20,0	19,5	18,7	19,2	20,0	53,6	29,7	70,3
19,0	19,5	19,1	19,5	18,3	20,0	19,7	33,4	53,0	63,8	19,1	18,2
18,7	18,6	18,5	19,2	19,3	49,0	45,0	69,7	18,3	19,9	18,5	19,8
18,6	18,0	18,6	46,3	30,2	65,3	19,3	18,1	19,7	19,2	18,4	19,9
18,4	33,3	40,7	63,0	19,9	19,8	19,8	18,8	19,8	19,0	19,4	47,2

Tabela 2.1: Idades de vítimas de acidentes de trânsito na Inglaterra

19,5	18,3	18,8	19,5	19,7	18,1	21,2	49,4	55,1	34,7	23,1	21,8
22,2	20,3	23,6	20,0	20,5	30,7	33,8	37,3	22,6	24,0	22,3	21,4
20,0	22,8	23,2	32,0	49,0	53,2	20,0	23,2	20,7	20,9	22,0	20,1
22,5	33,1	53,6	58,9	21,7	22,7	22,3	23,2	23,6	23,1	23,9	53,9
25,5	70,3	23,9	21,3	22,5	21,3	21,2	22,3	20,1	38,8	48,2	63,2
21,9	22,6	20,2	20,6	22,5	21,6	20,4	38,0	33,5	71,8	23,9	23,7
22,9	21,0	23,2	22,1	21,5	40,7	35,3	70,5	23,3	21,4	22,5	22,3
23,3	22,4	21,5	69,7	61,3	67,2	20,2	21,9	24,0	20,9	22,2	22,2
22,0	70,9	74,5	79,6	23,2	21,1	23,6	23,9	21,5	22,9	23,3	63,0
61,7	65,2	21,2	21,3	23,6	23,5	22,3	20,5	23,5	62,8	64,7	76,7
23,7	22,8	23,2	22,3	20,6	21,8	22,0	69,3	60,8	74,3	22,6	20,4
23,3	22,0	23,3	23,3	21,0	78,1	70,4	66,1	21,8	21,6	21,5	23,5
22,2	23,5	20,1	65,1	75,7	71,8	22,1	20,4	23,2	21,9	21,5	20,3
21,2	63,2	65,5	69,9	21,2	22,7	20,4	20,3	20,4	23,7	21,1	79,3
63,3	74,8	23,8	20,3	23,1	23,3	20,0	21,8	23,6	62,3	63,8	78,8
23,9	22,8	22,9	21,6	20,3	22,9	21,3	42,3	58,3	54,8	22,5	20,3
20,6	21,4	23,1	23,6	23,6	53,9	43,9	32,4	21,4	22,8	20,6	20,9
22,1	23,2	23,8	58,2	26,5	35,6	22,1	21,5	23,6	20,9	23,2	20,8
22,8	65,4	68,4	61,6	20,8	58,6	44,1	29,0	44,3	42,5	40,9	71,7
78,3	61,5	58,7	41,2	36,8	43,4	53,7	45,7	26,9	73,7	72,3	70,8
25,2	28,5	36,0	31,5	55,7	35,4	41,8	78,7	72,6	70,6	40,0	42,2
29,6	52,4	35,4	28,2	52,8	75,7	64,2	66,9	54,0	34,4	42,8	32,1
56,6	30,7	27,7	72,6	67,5	63,4	43,0	44,3	57,0	47,9	34,6	54,8
41,7	63,8	60,3	65,8	57,5	57,5	34,4	34,0	29,5	36,6	40,3	65,9
62,3	76,2	34,2	27,7	53,1	54,2	54,6	33,3	53,6	62,1	70,2	66,1
38,0	41,5	44,7	35,3	41,3	46,3	25,1	69,5	78,2	73,2	52,1	48,1
33,7	43,8	31,0	43,3	53,6	66,4	64,7	75,3	42,1	56,2	38,6	30,0
40,4	54,8	43,6	77,3	65,0	75,8	48,9	43,3	34,7	48,6	43,4	27,8
39,0	63,5	65,9	66,0	36,9	37,3	40,8	41,8	51,0	33,0	49,6	71,2
74,3	76,5	38,0	27,1	58,3	27,2	41,3	38,0	39,9	63,1	70,1	60,8
37,5	39,8	55,5	31,5	51,9	45,4	50,8	63,5	75,2	25,2	52,5	40,5
37,9	58,5	51,1	37,0	45,6	75,0	65,2	44,6	54,7	46,7	33,9	51,2
29,7	42,4	26,6	71,7	64,4	69,9	35,3	45,8	49,6	46,5	40,4	55,6
27,1	70,1	75,3	75,7	45,6	51,9	41,8	29,5	36,0	35,1	78,2	

Tabela 2.2: Idades de vítimas de acidentes de trânsito na Inglaterra

Uma consideração importante para a elaboração de tabelas de distribuição de frequências agrupadas é sobre o tamanho de cada intervalo. Nesse sentido existem duas alternativas, a primeira que consiste em considerar intervalos do mesmo tamanho ou a segunda que define tamanhos diferentes para os intervalos, dependendo de diversos fatores associados ao problema específico.

Intervalos de tamanhos iguais

A primeira alternativa na construção de tabelas de distribuição de frequências é sempre considerar intervalos de tamanho igual. Neste caso, será fácil calcular a frequência relativa de cada intervalo como sendo a divisão da frequência absoluta pelo tamanho da amostra. A tabela de distribuição de frequências para os dados citados anteriormente aparece a seguir:

Idade	f	fr	F	Fr	X'
0⊢8	61	0,07	61	0,07	4
8⊢16	71	0,09	132	0,16	12
16⊢24	264	0,32	396	0,48	20
24⊢32	54	0,07	450	0,55	28
32⊢40	83	0,10	533	0,65	36
40⊢48	83	0,10	616	0,75	44
48⊢56	72	0,09	688	0,84	52
56⊢64	48	0,06	736	0,90	60
64⊢72	45	0,06	781	0,96	68
72⊢80	34	0,04	815	1,00	76
	815	1,00			

Nesta tabela, há uma coluna contendo a *marca de classe* (X') que é o ponto central de cada intervalo e que será usada, posteriormente, para calcular a média.

Tamanhos de intervalos diferentes

Existe informação adicional quando se trabalha com alguns problemas da área biomédica e esta informação pode ser útil para construir intervalos de tamanhos diferentes. Por exemplo, quando se trabalha com idades e desenvolvimento de massa corporal sabe-se que existem algumas faixas etárias com características importantes e outras em que não existe grande desenvolvimento. Isto poderia levar a definir intervalos de tamanho menor em que se espera maior e mais rápido desenvolvimento e intervalos de maior tamanho em que existe relativa estabilidade nesse desenvolvimento. Desta forma, será possível observar as mudanças nas faixas de interesse.

Para os dados de idade de vítimas fatais em acidentes de trânsito na Inglaterra, um órgão de controle de acidentes definiu algumas faixas etárias que são usadas na tabela a seguir.

Idade	f	fr_1	fr_2
0⊢5	28	0,03	0,04
5⊢10	46	0,06	0,06
10⊢16	58	0,07	0,09
16	20	0,02	0,13
17	31	0,04	0,19
18⊢20	64	0,08	0,20
20⊢25	149	0,18	0,19
25⊢60	316	0,39	0,06
60+	103	0,13	0,04
	815	1,00	1,00

Nesta tabela aparece uma coluna chamada "fr_1" que resulta da divisão da frequência absoluta de cada intervalo pelo tamanho de amostra. Porém esta conta não é a frequência relativa de cada intervalo, precisando ainda ser corrigida usando um fator associado ao tamanho de cada intervalo; depois desta correção obtém-se a coluna "fr_2" que contém os verdadeiros valores de frequência relativa de cada intervalo. A expressão matemática que permite obter os valores de fr_2 é dada por:

$$\begin{aligned} fr_2 &= f \times \frac{1}{\omega \sum \frac{f}{\omega}} \\ &= fr_1 \times \frac{N}{\omega \sum \frac{f}{\omega}} \end{aligned}$$

onde ω é o tamanho do intervalo e N é o tamanho da amostra.

2.2 Representação gráfica de dados

Existe a necessidade de obter informação relevante a partir de um grande volume de dados provenientes de um processo de amostragem. Esta informação pode ser "visualizada" de forma mais fácil através da utilização de gráficos que representem o conjunto de dados coletados. A seguir, são apresentados os principais tipos de gráficos estatísticos.

2.2.1 Gráfico de setores

Esse tipo de gráficos, popularmente conhecidos como gráficos de *pizza* ou *bolo*, podem ser utilizados para representar dados categóricos ou inclusive alguns dados numéricos em que existem poucos valores possíveis. Para a elaboração destes gráficos serão construídos setores de uma circunferência cujo ângulo, a partir do centro, será proporcional ao número de indivíduos com uma particular característica, isto é, proporcional com a frequência.

As tabelas 2.3 e 2.4 geram exemplos de gráficos de setores em três situações diferentes, apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2.

Origem dos alunos	Frequência
Urbana	240
Suburbana	1400
Rural	360

Tabela 2.3: Distribuição da origem de estudantes de uma escola pública

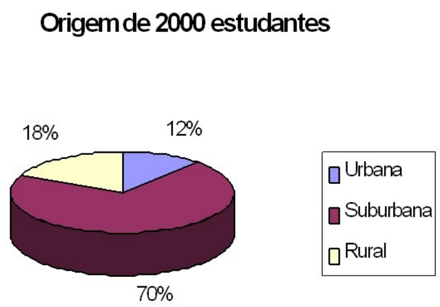

Figura 2.1: Gráfico de setores da origem de estudantes de uma escola pública.

Classificação	Número de jovens
Baixo peso	11
Normal	105
Sobrepeso	25
Obeso	4

Tabela 2.4: Distribuição da avaliação nutricional de um grupo de jovens

2.2.2 Gráfico de barras e de colunas

Este tipo de gráficos é utilizado para representar dados numéricos discretos e, em alguns casos, dados categóricos. Nele, num dos eixos coordenados são re-

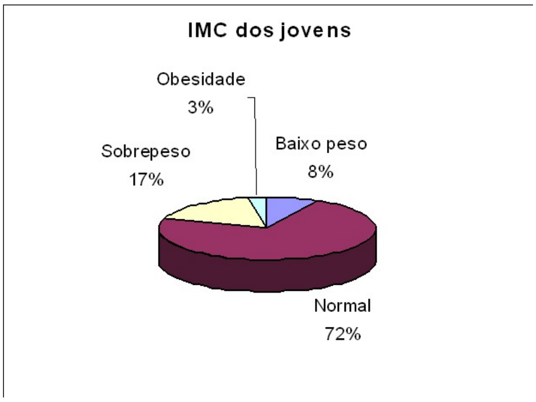

Figura 2.2: Gráfico de setores da avaliação nutricional de um grupo de jovens.

presentadas as frequências e no outro os valores da variável. São construidas colunas ou barras para cada valor da variável com uma altura proporcional com a frequência. Não existe diferença entre o gráfico de barras e o de colunas a não ser pela troca de variáveis nos eixos coordenados, como aparece no gráfico de colunas da figura 2.3 e no de barras da figura 2.4.

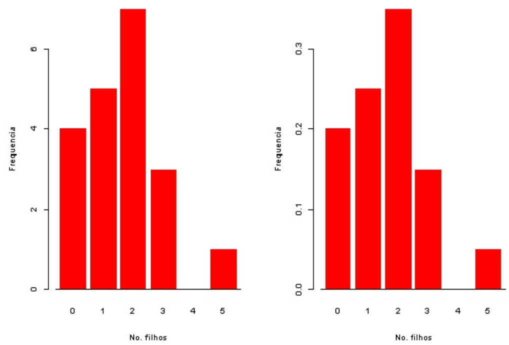

Figura 2.3: Número de filhos para os 20 empregados de uma empresa.

2.2.3 Gráfico de dispersão

Os gráficos de dispersão são utilizados para representar as relações existentes entre duas variáveis numéricas e para tal utilizam um gráfico em que cada eixo representa uma variável. Um exemplo pode ser visto no gráfico da figura 2.5. Cada par de dados de um indivíduo gera um ponto no gráfico, de forma que, ao observar a nuvem de pontos gerados, tem-se uma ideia da relação entre as variáveis representadas.

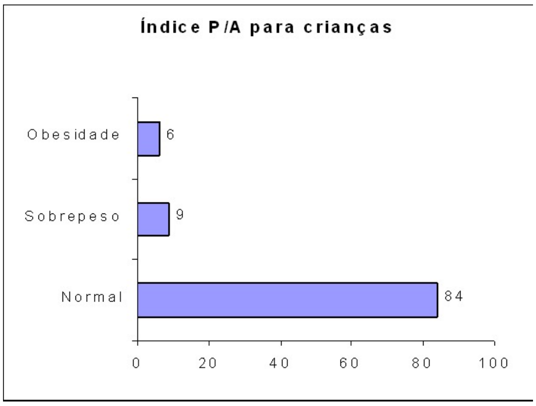

Figura 2.4: Índice Peso/Altura de 99 crianças com idade entre 7 e 10 anos.

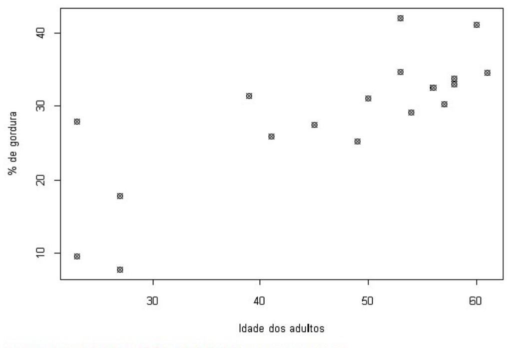

Figura 2.5: Idade e porcentagem de gordura para 18 adultos normais.

2.2.4 Gráfico de séries de tempo

Este tipo de gráficos é um caso especial dos gráficos de dispersão que apresentam a evolução de uma variável de interesse ao longo do tempo. Assim, no eixo vertical são representados os valores da variável em estudo e no eixo horizontal as unidades de tempo em que são observados os correspondentes valores. Exemplos são apresentados nos gráficos das figuras 2.6 e 2.7.

2.2.5 Histograma

O histograma é um gráfico de barras para variáveis numéricas contínuas organizadas em tabelas de distribuição de frequências que considera, no eixo vertical, as frequências relativas.

Podem ser considerados os dados de uma tabela de distribuição de frequências com intervalos de tamanhos iguais, como no histograma da figura 2.8 obtido

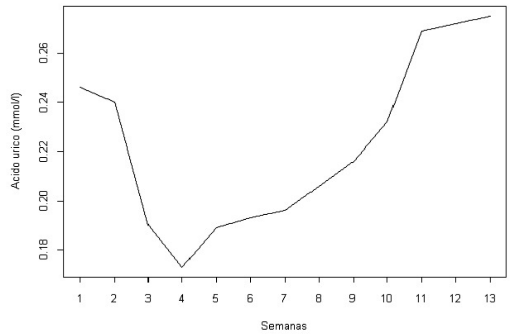

Figura 2.6: Ácido úrico antes, durante e depois da gravidez.

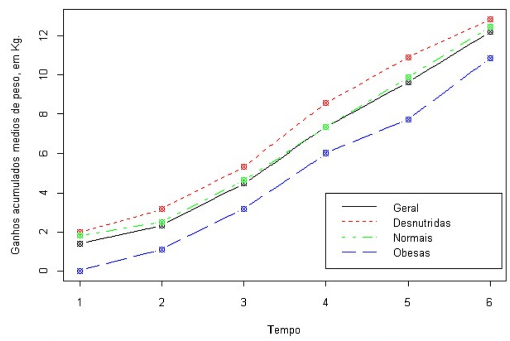

Figura 2.7: Ganhos acumulados médios de peso (Kg) para gestantes do Inst. de Puericultura e Pediatria Martagão Gesteira.

a partir da tabela da seção 2.1.2 . Para os mesmos dados que originaram a tabela anteriormente citada, devem ser tomados cuidados quando os tamanhos de intervalo são diferentes. Neste caso, a frequência relativa deve ser proporcional à área de cada barra. Quando não se toma este cuidado, os histogramas podem refletir situações irreais como no histograma da figura 2.9. O histograma corrigido para os mesmos dados aparece na figura 2.10.

2.2.6 Polígono de frequências

O polígono de frequências resulta da união dos pontos centrais no topo de cada barra do histograma. A figura 2.11 apresenta o polígono de frequências obtido a partir do histograma da figura 2.8. A figura 2.12 apresenta o polígono de frequências obtido a partir do histograma da figura 2.10.

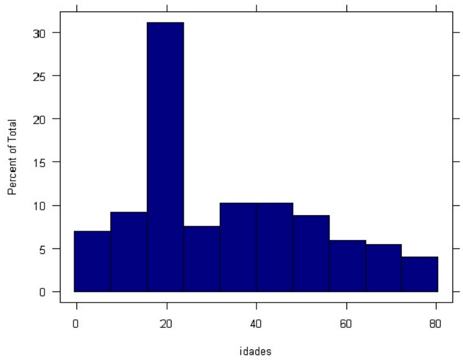

Figura 2.8: Distribuição dos acidentes em estradas por idades na Inglaterra. Intervalos de tamanhos iguais.

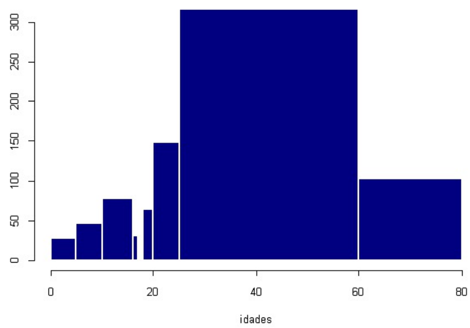

Figura 2.9: Distribuição dos acidentes em estradas por idades na Inglaterra. Intervalos de tamanhos diferentes. Gráfico errado.

2.2.7 Tipos de distribuições

O formato do histograma ou do polígono de frequências pode fornecer algumas características gerais da amostra coletada. Distribuições platicúrticas são obtidas de dados com grande variabilidade, enquanto as distribuições lepticúrticas têm uma variabilidade pequena, sendo muito concentradas em torno de um valor central. Isto é mostrado no gráfico da figura 2.13.

Distribuições com assimetria à direita são aquelas que apresentam observações de valores altos com frequência pequena. Distribuições com assimetria à esquerda apresentam observações de valores mínimos com frequência pequena. Estas duas distribuições aparecem no gráfico da figura 2.14.

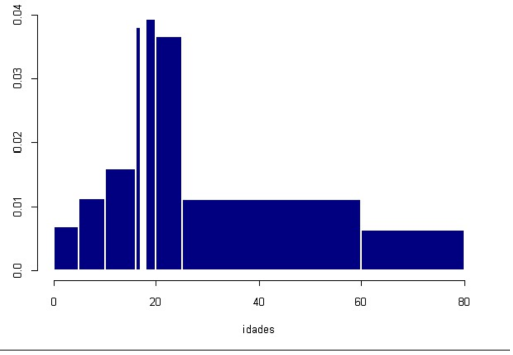

Figura 2.10: Distribuição dos acidentes em estradas por idades na Inglaterra. Intervalos de tamanhos diferentes. Gráfico corredo.

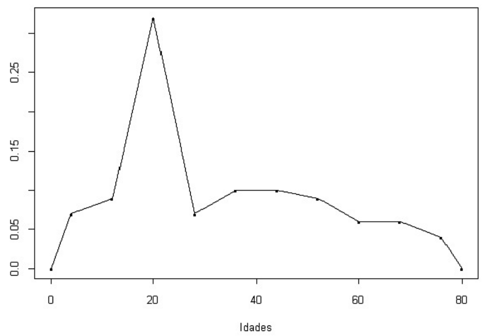

Figura 2.11: Polígono de frequências dos acidentes, por idades, em estradas da Inglaterra.

2.3 Medidas de posição

A análise inicial dos dados, além de construir tabelas e gráficos, consiste também no cálculo de valores, ou *estatísticas*, que ajudam na produção de uma visão geral dos dados. Nesta seção, serão apresentadas as medidas de posição, também chamadas medidas de tendência central, que procuram definir um valor que represente os dados. Para tal, serão usados, como exemplo, os dados de 25 pacientes com fibrose cística que aparecem na tabela seguinte:

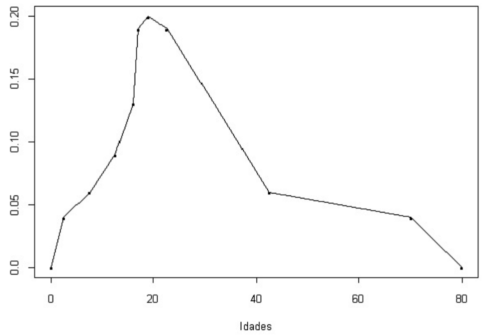

Figura 2.12: Polígono de frequências dos acidentes, por idades, em estradas da Inglaterra.

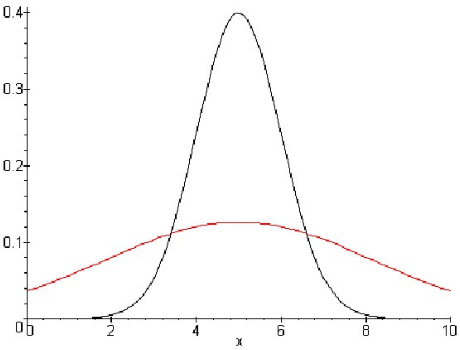

Figura 2.13: Distribuição platicúrtica, em vermelho, e lepticúrtica, em preto.

Idade (anos)	PImax (cm H_2O)	Idade (anos)	PImax (cm H_2O)	Idade (anos)	PImax (cm H_2O)
7	80	13	75	17	100
7	85	13	80	19	40
8	110	14	70	19	75
8	95	14	80	20	110
8	95	15	100	23	150
9	100	16	120	23	75
11	45	17	110	23	95
12	95	17	125		
12	130	17	75		

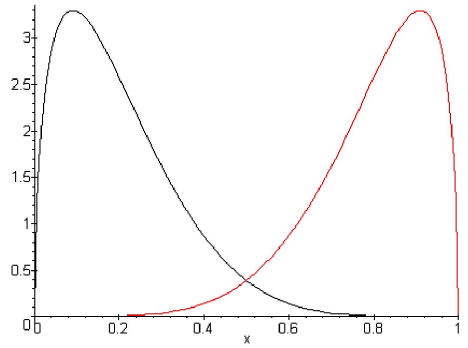

Figura 2.14: Distribuição com assimetria a direita, em preto, e distribuição com assimetria a esquerda, em vermelho.

2.3.1 Média aritmética ($\overline{X}$)

Esta estatística é muito usada e fornece uma ideia geral dos valores de uma amostra. Para o cálculo da média é necessário conhecer todos os valores dos dados da amostra, por este motivo ela é uma medida de posição que é afetada pela presença de valores discrepantes dentro da amostra. Seu cálculo é amplamente conhecido quando se dispõe de todos os valores e é dado a seguir:

A média é calculada pela soma dos valores dos dados, dividida pelo tamanho da amostra. A seguinte fórmula resume esta definição:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Para os dados de PImax tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{80 + 85 + \ldots + 95}{25} = \frac{2315}{25} \\ &= 92,6 \text{ cm } H_2O.\end{aligned}$$

Para as idades dos mesmos pacientes tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{7 + 7 + 8 + 8 + 8 + 9 + \ldots + 23 + 23 + 23}{25} \\ &= \frac{2 \times 7 + 3 \times 8 + 1 \times 9 + \ldots + 3 \times 23}{25} \\ &= \frac{2}{25} \times 7 + \frac{3}{25} \times 8 + \frac{1}{25} \times 9 + \ldots + \frac{3}{25} \times 23 \\ &= \frac{362}{25} \\ &= 14,48 \text{ anos}\end{aligned}$$

Para dados contínuos resumidos em tabelas de distribuição de frequências, o exercício anterior com as idades dos 25 pacientes fornece uma pista de como calcular a média através da seguinte formula:

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i X_i'}{n} = \sum fr_i X_i'$$

onde X_i' é a marca de classe do i-ésimo intervalo, f_i a frequência absoluta do i-ésimo intervalo e fr_i a frequência relativa do i-ésimo intervalo.

Exemplo: Calcular a idade média das vítimas fatais em acidentes de estrada na Inglaterra, usando a tabela da seção 2.1.2.

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{61 \times 4 + 71 \times 12 + \ldots + 34 \times 76}{815} = \frac{26796}{815} \\
&= 0,07 \times 4 + 0,09 \times 12 + \ldots + 0,04 \times 76 \\
&= 32,88 \text{ anos}
\end{aligned}$$

Comparando esta média com a média dos dados completos que é $\overline{X} = 33,02$ anos, observa-se uma discrepância que resulta da aproximação de cada um dos valores originais pela marca de classe do intervalo. Pode-se afirmar que a média calculada usando dados resumidos em tabelas de distribuição de frequências é uma aproximação da verdadeira média dos mesmos.

2.3.2 Mediana (Me)

A mediana é a observação que ocupa a posição central, depois que os dados são ordenados em forma crescente ou decrescente. Esta medida de posição não é afetada por valores discrepantes na amostra já que depende do número de elementos da amostra e não dos seus valores.

Quando os dados originais estão disponíveis e arrumados em forma crescente ou decrescente uma rápida inspecção dos dados permite achar o valor da mediana. Existem duas situações, quando o tamanho da amostra é um número ímpar e quando este é par, como pode ser visto nos seguintes exemplos.

Exemplo: Para os dados de função pulmonar de 25 pacientes com fibrose cística a mediana é o valor que ocupa a décima terceira posição.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PImax	40	45	70	75	75	75	75	80	80
Posição	10	11	12	13	14	15	16	17	
PImax	80	85	95	95	95	95	100	100	
Posição	18	19	20	21	22	23	24	25	
PImax	100	110	110	110	120	125	130	150	

$$Me = X_{(25+1)/2} = 95 \text{ cm } H_2O$$

Exemplo: Considerando os dez pacientes mais jovens do exemplo anterior, a mediana ocupa um ponto intermediário entre a quinta e a sexta observação.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PImax	40	45	70	75	75	75	75	80	80	80

$$\begin{aligned} Me &= \frac{X_{10/2} + X_{10/2+1}}{2} \\ &= \frac{75+75}{2} = 75 \text{ cm } H_2O \end{aligned}$$

Pelos exemplos pode-se afirmar que a mediana satisfaz

$$Me = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & n \text{ impar} \\ \\ \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Quando os dados estão representados numa tabela de distribuição de frequências agrupadas, aproxima-se o valor da mediana usando relações geométricas no histograma. Assim,

$$Me = Li + \omega \times \frac{0,5 - Fr_{ant}}{fr_{Me}}$$

sendo Li o limite inferior do intervalo que contém a mediana, ω o tamanho do intervalo, Fr_{ant} a frequência relativa acumulada do intervalo anterior ao da mediana e fr_{Me} a frequência relativa do intervalo da mediana.

Exemplo: Para os dados resumidos referentes a idades em acidentes de estrada na Inglaterra da seção 2.1.2 tem-se:

$$\begin{aligned} Me &= 24 + 8 \times \frac{0,5 - 0,48}{0,07} \\ &= 26,29 \text{ anos.} \end{aligned}$$

Comparando com a mediana calculada com os dados completos, que é $Me = 26,89$, pode se verificar uma discrepância devida a que a alternativa que usa os dados resumidos é uma aproximação. Em ambos casos conclui-se que metade das pessoas que sofreram acidentes de estrada tinham idades que não excediam o valor calculado para a mediana.

2.3.3 Percentil

Os percentis dividem o conjunto de dados ordenados de forma semelhante à mediana. Por exemplo, o percentil 10%, ou $0,1$, divide o conjunto de dados em duas partes, 10% com valores inferiores a esse percentil e 90% com valores maiores. De forma geral os percentis podem ser estimados pela fórmula:

$$P_\alpha = Li + \omega \times \frac{\alpha - Fr_{ant}}{fr_\alpha}$$

que é semelhante à da mediana, onde α é a frequência acumulada do percentil.

Exemplo: Calcular o percentil 10% para a idade de acidentes de estrada na Inglaterra da seção 2.1.2.

$$\begin{aligned} P_{0,10} &= 8 + 8 \times \frac{0,10 - 0,07}{0,09} \\ &= 10,7 \text{ anos.} \end{aligned}$$

Este último valor aproxima o percentil 10% calculado com os dados completos, $P_{0,10} = 10,6$ anos.

Primeiro quartil

O primeiro quartil é a observação que divide o conjunto de dados ordenados em duas partes, 25% dos dados com valores menores a este quartil e 75% com valores superiores.

Exemplo: Para as idades de acidentes em estradas na Inglaterra da seção 2.1.2:

$$\begin{aligned} P_{0,25} &= 16 + 8 \times \frac{0,25 - 0,16}{0,32} \\ &= 18,25 \text{ anos.} \end{aligned}$$

O primeiro quartil calculado com os dados completos é $P_{0,25} = 18,63$ anos.

Terceiro quartil

O terceiro quartil é a observação que divide o conjunto de dados ordenados em duas partes, 75% dos dados com valores menores a este quartil e 25% com valores superiores.

Exemplo: Para as idades de acidentes em estradas na Inglaterra da seção 2.1.2:

$$\begin{aligned} P_{0,75} &= 48 + 8 \times \frac{0,75 - 0,75}{0,09} \\ &= 48 \text{ anos.} \end{aligned}$$

O terceiro quartil calculado com os dados completos é $P_{0,75} = 46,75$ anos.

2.4 Medidas de variação

As medidas de posição são, na maioria dos casos, insuficientes para descrever um conjunto de dados, fornecendo uma idéia geral da posição dos valores da amostra, porém, não é possível saber se todos os dados estão concentrados ou dispersos em torno da medida de posição usada. Na tabela seguinte são apresentados 5 conjuntos de dados representados por grupos A, B, C, D e E.

Grupo A	3	4	5	6	7
Grupo B	1	3	5	7	9
Grupo C	5	5	5	5	5
Grupo D	3	5	5	7	
Grupo E	3,5	5	6,5		

Tanto a média quanto a mediana para todos os grupos é igual a 5, o que poderia levar à falsa idéia de que estes grupos são iguais caso se usasse só a medida de posição. Existem diversas formas de quantificar a *variabilidade* ou *dispersão* de um conjunto de dados. Todas estas formas usam uma medida de posição como referência e "medem" a proximidade ou afastamento dos dados com relação à medida de posição usada. De todas as medidas de variabilidade existentes, as mais conhecidas e usadas são a *variância* (S^2) e o *desvio padrão* (S) que são definidas pelas seguintes fórmulas:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2$$

$$S = \sqrt{S^2}$$

Exemplo: Calcular a variância e o desvio padrão da pressão inspiratória estática máxima dos 25 pacientes com fibrose cística anteriormente apresentados. O desenvolvimento matemático aparece na seguinte tabela, lembrando que $\overline{X} = 92,6$:

Paciente	PImax(cm H_2O)	$X_i - \overline{X}$	$\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
1	80	-12,6	158,76
2	85	-7,6	57,76
3	110	17,4	302,76
4	95	2,4	5,76
5	95	2,4	5,76
6	100	7,4	54,76
7	45	-47,6	2265,76
8	95	2,4	5,76
9	130	37,4	1398,76
10	75	-17,6	309,76
11	80	-12,6	158,76
12	70	-22,6	510,76
13	80	-12,6	158,76
14	100	7,4	54,76
15	120	27,4	750,76
16	110	17,4	302,76
17	125	32,4	1049,76
18	75	-17,6	309,76
19	100	7,4	54,76
20	40	-52,6	2766,76
21	75	-17,6	309,76
22	110	17,4	302,76
23	150	57,4	3294,76
24	75	-17,6	309,76
25	95	2,4	5,76
		$\sum(X_i - \overline{X})^2$	14906,00
		S^2	621,08
		S	24,92

2.4.1 Coeficiente de variação

Tanto a variância quanto o desvio padrão são medidas de variação que estão expressadas em função das mesmas unidades de medição da variável original, sendo necessário um conhecimento aprofundado do contexto do problema para uma melhor interpretação. De forma alternativa pode ser calculado o coeficiente de variação, $CV(X)$, usando a seguinte relação:

$$CV(X) = \frac{S}{\overline{X}}100\%$$

que serve como uma alternativa adimensional às medidas de variabilidade apresentadas. Costuma ser usado o critério arbitrário de considerar uma variação aceitável quando este coeficiente não é superior a 100%. O inconveniente deste coeficiente é que ele é afetado pelo valor da média, diminuindo seu valor conforme esta aumenta, mesmo com variabilidade constante.

2.4.2 Coeficiente de assimetria

O coeficiente de assimetria é calculado pela relação:

$$Coef.Assim. = \frac{\overline{X} - Mo}{S},$$

onde Mo é a moda, definida como a observação de maior frequência. Um valor negativo deste coeficiente caracteriza uma distribuição com assimetria à esquerda. O valor positivo é obtido para distribuições com assimetria à direita. Um coeficiente igual a zero significa que a distribuição dos dados é simétrica.

2.4.3 Boxplot ou diagrama de caixas

O boxplot é um gráfico alternativo ao histograma de frequências. Ele contém informação adicional que inclui a mediana, primeiro e terceiro quartis, valores discrepantes, variabilidade e simetria entre outros. O gráfico da figura 2.15 mostra o boxplot para os dados referentes à pressão inspiratória estática máxima de 25 pacientes com fibrose cística.

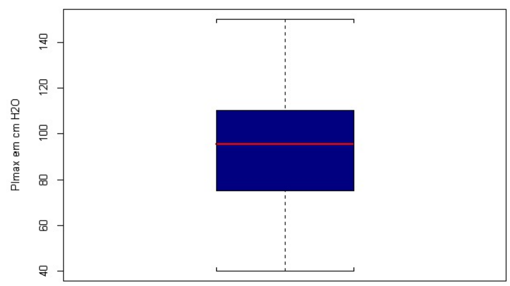

Figura 2.15: Diagrama de caixa dos dados dos 25 pacientes com fibrose cística.

2.5 Exercícios

1. Uma pesquisa com moradores da cidade de Niterói indagou sobre o número de refeições realizadas em casa. Foram entrevistadas 30 pessoas

obtendo-se os seguintes números: 2, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2 e 3.

(a) Sabendo que os dados são quantitativos discretos, organize uma tabela de distribuição de frequências.

(b) Faça uma representação gráfica dos dados.

2. Os dados abaixo são as idades em que 30 indivíduos começaram o tratamento de uma certa insuficiência.

23	26	31	23	24	24
30	30	29	28	28	31
28	35	26	31	31	21
26	27	26	36	28	22
28	21	24	25	29	32

Construa uma tabela de distribuição de frequências considerando 6 classes. Construa um gráfico adequado para os dados.

3. Os níveis de um determinado hormônio que indica clinicamente um estado de alto estresse, obtidos para 60 funcionários do Hospital Antônio Pedro, estão relacionados a seguir:

1.84	1.60	1.72	1.81	1.84	1.51	1.71	1.61	1.72	1.59
1.50	1.71	1.77	1.72	1.58	1.55	1.79	1.80	1.89	1.82
1.58	1.69	1.60	1.62	1.68	1.64	1.68	1.77	1.46	1.47
1.72	1.64	1.67	1.57	1.80	1.70	1.60	1.63	1.65	1.73
1.57	1.52	1.82	1.50	1.88	1.63	1.72	1.53	1.61	1.79
1.41	1.64	1.61	1.64	1.64	1.68	1.78	1.76	1.63	1.79

Construa a tabela de distribuição de frequências usando 7 classes.

4. Complete a seguinte tabela de distribuição de frequências mostrando os cálculos necessários para isto:

Intervalos	Freq.Abs.	Freq.Rel.	Freq.Abs.Ac.	Freq.Rel.Ac.	X'
50.70-58.15	f_1	1/3	10	Fr_1	54.425
58.15-65.60	f_2	1/10	13	13/30	61.875
65.60-73.05	f_3	fr_3	21	7/10	69.325
73.05-80.50	f_4	1/10	24	4/5	76.775
80.50-87.95	f_5	fr_5	F_5	29/30	X'_5
87.95-95.40	f_6	1/30	F_6	1	91.675
	F_6	1			

5. A capacidade pulmonar é medida através do volume expiratório forçado (litros). Para 13 jovens os valores observados deste parâmetro são: 2,3; 2,15; 3,5; 2,6; 2,75; 2,82; 4,05; 2,25; 2,68; 3,0; 4,02; 2,85; 3,38. Calcular o desvio padrão destes dados. Calcular e interpretar a mediana.

6. Os seguintes dados se referem ao peso ao nascer de 3751275 bebês nascidos num determinado país:

Peso ao nascer (gramas)	Frequência relativa
$0 \vdash 500$	0,001
$500 \vdash 1000$	0,005
$1000 \vdash 1500$	0,006
$1500 \vdash 2000$	0,013
$2000 \vdash 2500$	0,043
$2500 \vdash 3000$	0,159
$3000 \vdash 3500$	0,367
$3500 \vdash 4000$	0,295
$4000 \vdash 4500$	0,092
$4500 \vdash 5000$	0,017
$5000 \vdash 5500$	0,002

(a) Classifique a variável de interesse.

(b) Especifique o tipo de estudo usado.

(c) Calcule e interprete a mediana e a média dos dados.

(d) Calcule o desvio padrão.

7. Os níveis séricos de colesterol para 1067 homens, com idades entre 25 e 34 anos encontram-se na seguinte tabela:

mg/100ml	N^o homens
80 - 120	13
120 - 160	150
160 - 200	442
200 - 240	299
240 - 280	115
280 - 320	34
320 - 360	9
360 - 400	5

(a) Defina e classifique a variável de interesse.

(b) Construa um gráfico adequado para os níveis séricos de colesterol.

(c) Calcule e interprete a mediana.

8. Pacientes do Hospital Antônio Pedro foram submetidos a um teste de esforço quanto ao número de quilômetros que conseguiram caminhar sem parar. Os dados estão apresentados a seguir:

Quilômetros	N^o de pacientes
0 - 4	438
4 - 8	206
8 - 12	125
12 - 16	22
16 - 20	9

(a) Qual é a variável em estudo?

(b) Qual é a distância média caminhada pelos pacientes examinados?

(c) Calcule e interprete o valor da mediana.

(d) Calcule o desvio padrão da distância caminhada.

9. A seguinte tabela apresenta dados de 17 pacientes com um distúrbio nutricional tratados com uma droga chamada SA. A dose de SA é apresentada junto com os valores de um índice (SI) que mede o nível de atividade intestinal.

Dose total de SA (mg)	SI
360	2,0
1390	2,0
1135	3,5
410	5,7
360	13,0
560	13,9
1410	15,4
960	16,6
910	16,6

Dose total de SA (mg)	SI
2950	22,3
1935	47,0
435	65,0
310	$> 80,0$
690	$> 80,0$
1260	$> 80,0$
1310	$> 80,0$
1410	$> 80,0$

(a) Alguns valores de SI são apresentados como '$> 80,0$'. Qual é o nome dado a este tipo de observações?

(b) É possível calcular a média de SI? Explique e sugira, se for o caso, outra medida de posição para representar os dados de SI.

(c) Calcule e interprete a média e a mediana da dose total de SA.

10. Um estudo foi conduzido para comparar o consumo energético de mulheres adolescentes que sofriam de bulimia com mulheres adolescentes com composição corporal e níveis de atividade física similares, porém, sem o distúrbio. A seguir são listados os valores de ingestão calórica diária, em quilocalorias por quilograma, para as amostras de adolescentes dos dois grupos.

Consumo calórico diário (kcal/kg)				
Bulímica			Saudável	
15,9	18,9	25,1	20,7	30,6
16,0	19,6	25,2	22,4	33,2
16,5	21,5	25,6	23,1	33,7
17,0	21,6	28,0	23,8	36,6
17,6	22,9	28,7	24,5	37,1
18,1	23,6	29,2	25,3	37,4
18,4	24,1	30,9	25,7	40,8
18,9	24,5	30,6		

(a) Obtenha o consumo calórico médio e mediano para cada grupo de adolescentes.

(b) Calcule o desvio padrão de cada grupo.

(c) Um valor típico de consumo calórico diário é maior para as adolescentes que sofrem de bulimia ou para as adolescentes saudáveis? Que grupo tem maior variabilidade nas medidas?

Capítulo 3

Elementos de probabilidades e suas distribuições

3.1 Probabilidades

O estudo das probabilidades se faz necessário em situações em que se conhece os desfechos possíveis de alguma situação, porém não se conhece qual deles irá acontecer; nas áreas biomédicas isto acontece constantemente.

Alguns conceitos precisam ser apresentados para facilitar a definição e entendimento das probabilidades.

Um *experimento aleatório* é qualquer experimento em que é possível definir todos os resultados deste sem conhecer qual deles será observado.

O *espaço amostral* é o conjunto de todos os valores possíveis de um experimento aleatório.

Um *evento* é qualquer subconjunto de um espaço amostral.

3.1.1 Definições de probabilidade

1. Definição clássica: A probabilidade de um evento é a divisão do número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis.

2. Definição frequentista: A probabilidade de um evento A, $P(A)$, está dada por:
$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$
onde m é o número de vezes que é observado A e n é o número de repetições do experimento. A expressão anterior indica que a divisão $\frac{m}{n}$ será *calculada* quando n for suficientemente grande.

3. Definição subjetivista: A probabilidade de um evento A, $P(A)$, é a medida dada por alguém sobre o grau de crença do acontecimento de

A numa escala em que 0 representa total certeza do não acontecimento de A e 1 total certeza do acontecimento de A.

Alguns resultados básicos para dois eventos A e B são enumerados a seguir:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Se o espaço amostral é denotado por Ω, então $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A \smile B) = P(A) + P(B) - P(A \frown B)$.
4. Dois eventos são exclusivos se possuem interseção vazia.
5. Para dois eventos exclusivos, A e B, a probabilidade deles acontecerem simultaneamente é nula. Isto é $P(A \frown B) = 0$.
6. Se um espaço amostral está formado pelos eventos exclusivos $A_1, ..., A_n$ então $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1$.
7. Seja A' o evento complementar de A então $P(A') = 1 - P(A)$.

3.1.2 Probabilidade condicional

Em algumas situações, o acontecimento de certos eventos influencia outros através de suas probabilidades. Como por exemplo, a probabilidade de uma pessoa ser hipertensa varia segundo o estado nutricional dela. Os obesos têm maior probabilidade de hipertensão comparados com os eutróficos.

Para dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de A, dado B, $P(A|B)$, é definida pela relação:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo: A tabela a seguir mostra a relação entre dois sintomas que costumam aparecer em pessoas com uma determinada doença. A amostra está formada por 266 pessoas com a doença.

	Sintoma A		
Sintoma B	Sim	Não	Total
Sim	212	24	236
Não	8	22	30
Total	220	46	266

- A probabilidade de um paciente ter o sintoma A está dada por:

$$P(A) = \frac{220}{266} = 0,83$$

- A probabilidade de um paciente, que tem o sintoma B, ter o sintoma A é calculada como:

$$P(A|B) = \frac{\frac{212}{266}}{\frac{236}{266}} = \frac{212}{236} = 0,90$$

3.1.3 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes permite rever a informação probabilística sobre um determinado evento quando existe informação sobre outro evento relacionado ao de interesse. Assim ele pode ser usado para conhecer o risco de se ter uma determinada doença à luz da informação fornecida pelo resultado de um determinado teste de diagnóstico, tendo disponível o risco populacional.

O teorema de Bayes diz que, para dois eventos A e B, a probabilidade de A condicional a B é dada por:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')} \end{aligned}$$

A relação que aparece no denominador do Teorema de Bayes, $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')$ é conhecida como Regra da Probabilidade Total e permite calcular a probabilidade incondicional de um evento.

Exemplo: Um restaurante popular apresenta dois tipos de refeição: salada completa ou um prato a base de carne. Vinte por cento dos fregueses do sexo masculino preferem salada; trinta por cento das mulheres escolhem carne; setenta e cinco por cento dos fregueses são homens. Num certo dia o primeiro freguês a sair do restaurante escolheu a salada completa. Qual é a probabilidade deste freguês ser do sexo feminino?

Definindo os eventos S: *o freguês escolhe salada completa* e H: *o freguês é do sexo masculino* são estabelecidas as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(S|H) &= 0,2 \\ P(S'|H') &= 0,3 \\ P(H) &= 0,75 \end{aligned}$$

A probabilidade solicitada é $P(H'|S)$ que, através do Teorema de Bayes, será:

$$\begin{aligned} P(H'|S) &= \frac{P(S|H')P(H')}{P(S|H')P(H') + P(S|H)P(H)} \\ &= \frac{0,7 \times 0,25}{0,7 \times 0,25 + 0,2 \times 0,75} \\ &= 0,54 \end{aligned}$$

Deve ser observado que este resultado é mais do que o dobro da probabilidade inicial de um freguês ser do sexo feminino.

3.2 Algumas aplicações das probabilidades

3.2.1 Comparação de riscos e risco relativo

O risco é uma quantificação do grau de certeza de algum evento, geralmente um fator negativo ou nocivo para a saúde. Portanto, pode ser visto como uma probabilidade.

Em determinadas situações o interesse está em comparar o risco de acontecer algum evento em dois grupos independentes.

Em estudos prospectivos, grupos de indivíduos com características diferentes são acompanhados para estudar a ocorrência de um resultado particular. Nestes ensaios é fácil calcular a proporção de indivíduos com a característica de interesse em cada grupo, e a razão destas duas proporções é uma medida comparativa dos riscos de um grupo contra o outro. Esta razão é conhecida como *risco relativo*.

De forma geral, a tabela 3.2.1 mostra o resultado de um estudo prospectivo:

		Grupo 1	Grupo 2	Total
Presença da	Sim	a	b	$a+b$
característica	Não	c	d	$c+d$
	Total	$a+c$	$b+d$	n

Tabela 3.1: Representação geral dos resultados de um estudo prospectivo

Os riscos de aparecer a característica de interesse em cada grupo são:

$$Risco_{Grupo1} = \frac{a}{a+c}$$
$$Risco_{Grupo2} = \frac{b}{b+d}$$

e o risco relativo é:

$$RR = \frac{a/(a+c)}{b/(b+d)}.$$

Um valor de $RR = 1$ significaria que o risco em ambos grupos é igual.

Exemplo: A tabela 3.2.1 mostra o resultado do estudo de 107 bebês com peso no nascimento inferior ao percentil 5% para seu tempo de gestação, segundo padrões publicados. O retardo do crescimento dos bebês foi classificado como *simétrico* ou *assimétrico* segundo o resultado de um exame de ultrasom, e esta classificação é mostrada em relação ao escore Apgar.

		Simétrico	Assimétrico	Total
Apgar < 7	Sim	2	33	35
	Não	14	58	72
	Total	16	91	107

Tabela 3.2: Relação entre o escore Apgar < 7 e classificação do retardo de crescimento fetal.

Para bebês com classificação *simétrico* ou *assimétrico*, o risco de um escore Apgar menor a 7 é:

$$\begin{aligned} Risco_{Sim} &= \frac{2}{16} = 0,13 \\ Risco_{Ass} &= \frac{33}{91} = 0,36 \end{aligned}$$

e o risco relativo:

$$RR = \frac{2/16}{33/91} = 0,345$$

o que significa que o risco de ter um escore Apgar menor a 7 no grupo simétrico é aproximadamente 35% do risco no grupo assimétrico.

3.2.2 Epidemiologia

As probabilidades são amplamente utilizadas em epidemiologia. Diversas taxas e indicadores são casos especiais de aplicações das probabilidades, destacando-se a *prevalência* e a *incidência*.

A prevalência de uma doença é a proporção, ou probabilidade, de uma doença numa determinada população.

A incidência de uma doença é a proporção, ou probabilidade, de casos novos de uma doença em um determinado período.

Para o gráfico 3.1, a prevalência no período 0 a 18 está relacionada com os 10 casos existentes no mesmo, enquanto que a incidência para o mesmo período é proporcional aos 7 casos que começaram dentro dele.

Em ambos casos considera-se como denominador o tamanho da população exposta à doença.

3.2.3 Teste de diagnóstico

Diagnóstico é parte essencial na prática clínica, e muitas pesquisas médicas têm por objetivo melhorar os métodos de diagnóstico. A questão de interesse é quão bom um particular teste de diagnóstico pode ser. Isto pode ser

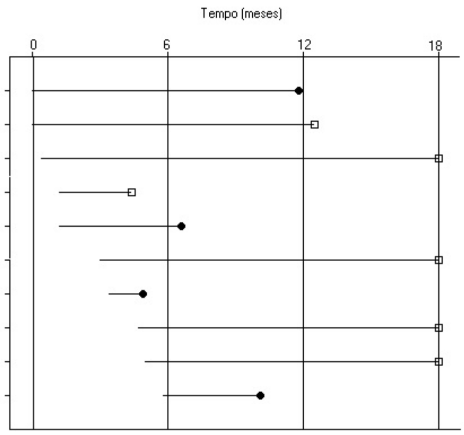

Figura 3.1: Acompanhamento de pacientes com uma determinada doença. Os pacientes representados por linhas terminadas em círculos cheios são aqueles que tiveram alta da doença, os outros são observações censuradas.

avaliado estudando os conceitos de *sensibilidade*, *especificidade*, *valor preditivo positivo* e *valor preditivo negativo* de um teste. Para formalizar as definições serão usados os eventos A: o paciente está doente e B: o paciente tem resultado positivo no teste de diagnóstico.

Sensibilidade

A sensibilidade de um teste é a proporção de resultados positivos identificados, entre todos os doentes. Em termos de probabilidades:

$$Sensibilidade = P(B|A)$$

Especificidade

A especificidade de um teste é a proporção de resultados negativos, entre os não doentes. Usando nomenclatura de probabilidades se tem:

$$Especificidade = P(B'|A')$$

onde A' indica o evento o paciente não está doente e B' o evento o paciente tem resultado negativo no teste.

Valor preditivo positivo (VPP)

O valor preditivo positivo de um teste é a proporção dos pacientes que têm a doença entre os que apresentam resultado positivo no teste. Formalmente:

$$VPP = P(A|B)$$

Valor preditivo negativo (VPN)

O valor preditivo negativo de um teste é a proporção dos pacientes que não têm a doença entre os que apresentam resultado negativo no teste. Ou:

$$VPN = P(A'|B')$$

Exemplo: Um novo teste clínico é usado para diagnosticar uma doença. Os resultados do estudo de 344 indivíduos estão resumidos na tabela 3.3.

Resultado	Estado do indivíduo		
do teste	Doente	Não doente	Total
Positivo	231	32	263
Negativo	27	54	81
Total	258	86	344

Tabela 3.3: Resultados de um teste clínico segundo o estado real dos indivíduos.

Para estes dados podem ser calculadas a sensibilidade, a especificidade, o VPP e o VPN:

$$\begin{aligned} Sensibilidade &= \frac{231}{258} = 0,90 \\ Especificidade &= \frac{54}{86} = 0,63 \\ VPP &= \frac{231}{263} = 0,88 \\ VPN &= \frac{54}{81} = 0,67 \end{aligned}$$

3.3 Distribuições de probabilidades

Como já foi dito, as probabilidades são úteis quando uma variável é observada em um experimento aleatório. O comportamento probabilístico desta variável chamada de aleatória é representado através da *distribuição de probabilidades*. Isto significa que seria necessário achar a referida distribuição para cada problema/variável em estudo, porém, algumas situações padrões podem ser identificadas, gerando os chamados modelos probabilísticos de variáveis aleatórias. Os mais usados na área biomédica serão apresentados nas seguintes subseções, porém, não será usado nenhum formalismo que um estudo detalhado dos mesmos requer.

3.3.1 Distribuição Binomial

É um modelo probabilístico usado para dados discretos. É um dos modelos mais simples. Ele considera que um experimento tem dois possíveis resultados que podem ser chamados de *sucesso* e *fracasso*. Para cada um destes resultados existe uma probabilidade associada de forma que a soma destas sempre será igual a 1.

O interesse neste modelo é descrever o comportamento probabilístico do número de sucessos em n repetições do experimento.

Por exemplo, se o interesse é o fenômeno *obesidade mórbida*, através deste modelo binomial será possível descrever a variável *número de obesos mórbidos em uma população* e, mediante este, estimar a prevalência de obesidade mórbida como sendo a probabilidade de um indivíduo dessa população ser obeso mórbido.

3.3.2 Distribuição Poisson

Este modelo é utilizado quando a variável de estudo é o número de ocorrências de um evento em intervalos de medição fixos. Para isto é necessário supor que os eventos de interesse ocorrem ao longo do tempo, ou espaço, segundo uma taxa média fixa.

Exemplos de variáveis que podem ser modeladas com a distribuição Poisson são o número diário de casos novos de câncer de mama, o número de células anormais numa área fixa de slides histológicos, entre outras.

3.3.3 Distribuição Exponencial

A distribuição Exponencial está ligada à distribuição Poisson. Enquanto que a Poisson estuda o número de ocorrências em intervalos de medição fixos, a Exponencial estuda o tamanho dos intervalos entre duas ocorrências consecutivas.

Dada a relação existente entre modelos Poisson e Exponencial os exemplos da Poisson serão adaptados: o tempo decorrido entre dois casos novos de câncer de mama e a distância entre duas células anormais em slides histológicos têm distribuição exponencial.

3.3.4 Distribuição Normal

A distribuição Normal, também chamada Gaussiana, é a mais usada devido às propriedades matemáticas que a tornam a base de grande parte da teoria de inferência. Ela é muito usada quando a variável de estudo apresenta valores concentrados em torno de um valor, como mostrado no polígono da figura 3.2.

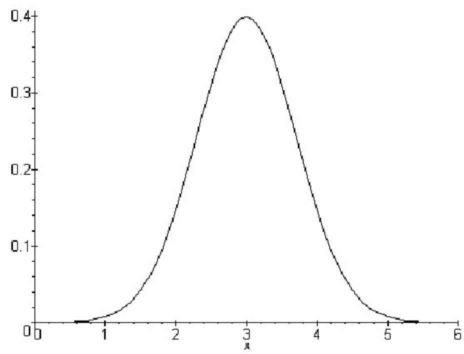

Figura 3.2: Polígono de frequências de uma variável com distribuição Normal de média 3.

A distribuição Normal fica definida por dois parâmetros, a média μ e a variância σ^2. O primeiro parâmetro define a posição da distribuição em torno do qual se encontram os demais valores e o segundo a dispersão dos valores em torno da posição central.

A distribuição Normal com média 0 e variância 1 é chamada *distribuição Normal padrão* e as probabilidades acumuladas para esta distribuição encontram-se em tabelas que aparecem num apêndice.

Um resultado teórico permite converter/reduzir qualquer distribuição Normal para uma Normal padrão, este resultado é comumente chamado *padronização*. Outro resultado teórico permite usar a distribuição Normal padrão desde que o tamanho de amostra seja suficientemente grande, independente da distribuição original dos dados, o teorema do limite central.

Para uma variável com distribuição Normal é fácil calcular qualquer probabilidade acumulda usando a padronização. Como por exemplo, seja X a variável que caracteriza a pressão arterial sistólica, que tem média 120 e variância 25. Achar a probabilidade de ter um paciente com no máximo 129 de PAS.

$$\begin{aligned}
P(X &\leq 129) = P\left(Z \leq \frac{129-120}{\sqrt{25}}\right) \\
&= P(Z \leq 1,8) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1,8) \\
&= 0,96407
\end{aligned}$$

Sabe-se que $P(Z \leq 0) = 0,5$ pelas propriedades da distribuição Normal padrão e pelas tabelas nos apêndices temos que $P(0 \leq Z \leq 1,8) = 0,46407$.

Achar também a probabilidade de encontrar um paciente com PAS menor ou igual a 111.

$$\begin{aligned}
P(X &\leq 111) = P\left(Z \leq \frac{111-120}{\sqrt{25}}\right) \\
&= P(Z \leq -1,8) = P(Z \geq 1,8) = 1 - P(Z \leq 1,8) \\
&= 0,03593
\end{aligned}$$

3.4 Distribuições amostrais

Quando é selecionada uma amostra a partir de uma população de interesse não existe total certeza de que esta seja representativa, só se sabe que esta foi coletada sob critérios de aleatoriedade. A partir desta amostra pode ser calculada, por exemplo, a média amostral. Porém, se outras amostras são coletadas da mesma população não existe a garantia de que as médias calculadas com estas amostras sejam todas iguais à primeira. Contudo, qualquer que seja a amostra, o objetivo é usá-la para fazer inferência sobre os parâmetros da população.

Na prática só é coletada uma amostra, por isso, antes de obter a média o seu valor é uma variável aleatória. Da mesma forma, outras estatísticas podem ser tratadas como variáveis aleatórias.

Sendo assim, uma distribuição amostral é definida como a distribuição de probabilidades de uma estatística.

Alguns resultados úteis sobre distribuições amostrais são apresentados a seguir.

- Para a média de uma amostra, se os dados originais têm distribuição Normal com média populacional μ e variância σ^2, então a média da amostra terá distribuição Normal com a mesma média, μ, e variância menor, σ^2/n.

- Para a proporção de indivíduos com uma característica, se os dados têm distribuição Binomial/Bernoulli, então para n suficientemente grande, a proporção de indivíduos com a característica de interesse na amostra,

$\widehat{p}$, tem distribuição que se aproxima da Normal quando n cresce, com média igual à proporção da população, p, e variância igual a $p(1-p)/n$.

Estes resultados, entre outros, permitem a construção das ferramentas que serão apresentadas nos seguintes capítulos.

3.4.1 Distribuição t de Student

A média de uma amostra tem uma distribuição similar, mas não igual à Normal quando a variância original é desconhecida: a distribuição t de Student, que depende de um parâmetro adicional chamado grau de liberdade. Valores de probabilidades acumuladas para esta distribuição são encontrados em tabelas nos apêncides. Esta distribuição será usada sempre que for necessário fazer inferência sobre médias quando as variâncias das populações forem desconhecidas.

3.5 Exercícios

1. Considere dois eventos A e B, mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,5$. Calcule:

   (a) $P(A \cap B)$

   (b) $P(A \cup B)$

   (c) $P(A|B)$

   (d) $P(A')$

2. Estuda-se a relação da pressão arterial elevada e três distúrbios nutricionais, chamados de A, B e C. Uma amostra de 100 pessoas com os referidos distúrbios forneceu os seguintes resultados:

Pressão arterial	Distúrbio A	Distúrbio B	Distúrbio C
Normal	10	8	2
Elevada	15	45	20

   Para este grupo de pessoas, calcular:

   (a) A probabilidade de uma pessoa com o distúrbio B ter a pressão elevada.

   (b) A probabilidade de uma pessoa ter o distúrbio B e pressão elevada.

   (c) A probabilidade de uma pessoa ter o distúrbio A ou pressão elevada.

(d) A probabilidade de uma pessoa ter a pressão normal.

3. A probabilidade de se ter uma determinada insuficiência no sangue é 0,05. Para detectar a referida insuficiência é usado um teste de diagnóstico cuja sensibilidade é 0,95 e especificidade 0,85. Calcular a probabilidade de uma pessoa não ter a insuficiência se o teste deu positivo.

4. Dos indivíduos de uma população, 60% estão vacinados contra uma certa doença. Durante uma epidemia, sabe-se que 20% a contraiu e que dois de cada 100 indivíduos estão vacinados e são doentes. Calcule a porcentagem de vacinados que ficam doentes e o de vacinados entre os que estão doentes.

5. Os dados seguintes são tomados de um estudo que investiga o uso de um teste de diagnóstico de um distúrbio nutricional.

	Distúrbio		
Teste	Presente	Ausente	Total
Positivo	77	96	173
Negativo	9	162	171
Total	86	258	344

(a) Qual é a sensibilidade da técnica de diagnóstico neste estudo?

(b) Qual é o valor preditivo negativo?

(c) Calcule a probabilidade de se ter um resultado positivo do teste e o distúrbio estar ausente.

(d) Calcule a probabilidade do teste fornecer um resultado positivo.

6. Três candidatos disputam as eleições para o Governo do Estado. O candidato de direita tem 30% da preferência eleitoral, o de centro tem 30% e o de esquerda 40%. Se eleito, a probabilidade de dar efetivamente prioridade para o programa de alimentação em escolas públicas é de 0,4; 0,6 e 0,9 para os candidatos de direita, centro e esquerda respectivamente.

(a) Qual é a probabilidade de não ser dada prioridade ao referido programa?

(b) Se o programa teve prioridade, qual é a probabilidade do candidato de direita ter vencido a eleição?

7. Em uma certa população, 4% dos homens e 1% das mulheres apresentam um distúrbio gástrico. Nessa população, 60% das pessoas são mulheres. Uma pessoa é escolhida ao acaso e descobre-se que apresenta o distúrbio. Qual é a probabilidade de que seja do sexo masculino?

8. Um laboratório que fabrica um teste para o diagnóstico de um certo distúrbio gástrico sabe que a sensibilidade do referido teste é 0,9 e a especificidade é 0,85. Se a prevalência do distúrbio é 0,15, calcule:

   (a) O valor preditivo positivo.

   (b) A probabilidade do teste dar resultado positivo para o distúrbio.

9. Apresente uma situação em que a variável de interesse esteja associada com a distribuição binomial. Defina e classifique esta variável.

10. Os estudos epidemiológicos indicam que 20% dos idosos sofrem de uma deterioração neuropsicológica. Sabe-se que a tomografia axial computadorizada (TAC) é capaz de detectar esse transtorno em 80% dos que sofrem disso, mas que também resulta 3% de falso positivo entre pessoas com boa saúde. Se for escolhido um idoso ao acaso, sendo o resultado do seu TAC positivo, qual é a probabilidade de que ele realmente esteja enfermo?

11. Considere a distribuição normal padrão com média 0 e desvio padrão 1.

    (a) Qual é a probabilidade de que um z-escore seja maior do que 2,60?

    (b) Qual é a probabilidade de que o z-escore esteja entre -1,70 e 3,10?

    (c) Que valor de z-escore limita os 20% inferiores da distribuição?

12. Assumir que os níveis de albumina têm distribuição normal com média 3,5 mg/dL e desvio padrão 0,25 mg/dL. Calcular a probabilidade de uma pessoa ser hipoalbumínica se para isto os níveis de albumina devem ser menores a 2,7 mg/dL.

13. A pressão sanguínea diastólica de mulheres entre 18 e 74 anos é normalmente distribuída com média 77 mmHg e desvio padrão 11,6 mmHg.

    (a) Qual é a probabilidade de que uma mulher selecionada ao acaso tenha pressão diastólica menor que 60 mmHg?

    (b) Qual é a probabilidade que ela tenha pressão entre 60 e 90?

14. Assumir que o índice de massa corporal é uma variável com distribuição normal de média 22,5 kg/m^2 e desvio padrão 1,25 kg/m^2. Um adulto é considerado *com baixo peso* se o IMC é menor a 20 kg/m^2 e é considerado *com sobrepeso* se o IMC é maior a 25. IMCs entre 20 e 25 caracterizam um adulto *eutrófico*. Calcular a probabilidade de um adulto ser considerado:

    (a) com baixo peso,

    (b) eutrófico.

Capítulo 4

Inferência estatística

O objetivo de uma pesquisa é, sempre, fazer afirmações sobre as características de uma população, ou saber o efeito geral de algum fator sobre a referida característica, de forma a poder tomar uma decisão válida a toda a população. Pelo exposto, seria sempre necessário fazer um censo, o que é difícil de fazer por muitos fatores.

A inferência estatística fornece mecanismos que permitem, a partir de uma amostra aleatória, obter conclusões válidas para a população.

O estudo da inferência está dividido em duas partes:

1. Estimação de parâmetros.
2. Teste de hipótese.

A primeira lida com a estimação de quantidades desconhecidas que estão relacionadas com a distribuição da variável em estudo, chamadas de *parâmetros*, a partir das quais é possível obter as características da população como média, mediana ou variância. A estimação pode ser *pontual*, quando um parâmetro é estimado através de uma estatística que gera um único valor, ou *por intervalos*, quando são calculados dois valores que formam um intervalo que, com certo grau de confiança, contém o parâmetro de interesse.

A segunda parte complementa a estimação, permitindo testar, à luz da evidência amostral, alguma hipótese referente a um ou vários parâmetros populacionais.

Quanto à estimação pontual de parâmetros, seria necessário o estudo profundo de diversos aspectos que não são tratados neste nível para poder formalizar a teoria sobre o assunto. Porém, de forma objetiva, pode-se afirmar que o melhor estimador da média de uma população, μ, é a média amostral, $\overline{X}$; um bom estimador da variância populacional, σ^2, é a variância amostral, S^2; para estimar a proporção de indivíduos com uma característica na população, p, podemos usar a proporção amostral, $\widehat{p}$.

4.1 Intervalos de confiança

De forma geral, a estimação por intervalos utiliza um estimador pontual para o parâmetro de interesse e a partir deste são gerados os limites inferior e superior do intervalo, diminuindo e somando do estimador pontual uma quantidade fixa que é comumente chamada de *margem de erro*. O cálculo de intervalos de confiança nem sempre é feito desta forma, porém neste texto só serão apresentados intervalos que apresentam esta característica. Quando a distribuição do estimador é simétrica então o intervalo de $100 \times (1-\alpha)\%$ de confiança tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & Conf\left(Estim. - k \times Des.Pad. \leq Parâmetro \leq Estim. + k \times Des.Pad.\right) \\ = \; & 100 \times (1-\alpha)\% \end{aligned}$$

onde $Estim.$ é o estimador pontual do parâmetro de interesse e a *margem de erro* resulta do produto de um valor associado com o grau de confiança definido, k, e uma medida associada à variabilidade dos dados, $Des.Pad.$

Quando o parâmetro de interesse é a média, μ, da população e os dados têm distribuição Normal ou o tamanho de amostra é suficientemente grande, então o intervalo de confiança será:

$$Conf\left(\overline{X} - k\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + k\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 100 \times (1-\alpha)\%$$

onde $\overline{X}$ e S são a média e o desvio padrão amostrais, n é o tamanho da amostra e o valor de k vem da distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade. Caso o desvio padrão da população, σ, for conhecido, substitui-se S por este valor e k será obtido da tabela da distribuição Normal padrão. Se n for *suficientemente grande*, então k será proveniente da tabela Normal padrão mesmo que σ for desconhecido.

O cálculo do intervalo de confiança para a proporção de indivíduos com uma característica de interesse, p, exige que o tamanho da amostra seja grande para que a distribuição Normal sirva como uma boa aproximação da distribuição Binomial. Se $n > 30$, então o intervalo de $100 \times (1-\alpha)\%$ de confiança está dado por:

$$Conf\left(\widehat{p} - k\sqrt{\frac{\widehat{p} \times (1-\widehat{p})}{n}} \leq p \leq \widehat{p} + k\sqrt{\frac{\widehat{p} \times (1-\widehat{p})}{n}}\right) = 100 \times (1-\alpha)\%$$

sendo $\widehat{p}$ a proporção amostral, n o tamanho da amostra e k um valor da distribuição Normal. Uma alternativa para o intervalo de confiança para uma proporção é substituir $\widehat{p}$ da raíz pelo valor $0,5$, gerando o que é conhecido como intervalo de confiança *conservador* que tem por característica apresentar a maior amplitude possível.

4.2 Exercícios

1. De experiências passadas sabe-se que o desvio padrão da altura de crianças da 5^a série é 5 cm. Colhendo uma amostra de 36 dessas crianças observou-se a média de 150 cm. Calcule um intervalo de 95% de confiança para a altura média dessas crianças.

2. Uma amostra aleatória de 51 notas de uma disciplina acusa média de 7,5 e desvio padrão de 1,0. Achar um intervalo de 95% de confiança para estimar a média das notas.

3. Uma amostra de 10 medidas do diâmetro da cintura acusa média 23,9 pol. e desvio padrão 0,6 pol. Determine um intervalo de 99% de confiança.

4. Um pesquisador está estudando a resistência de um determinado material, usado na fabricação de embalagem para alimentos, sob determinadas condições. Ele sabe que essa variável é normalmente distribuída. Utilizando os valores 4,9; 7,0; 8,1; 4,5; 5,6; 6,8; 7,2; 5,7; 6,2 unidades, obtidos de uma amostra de tamanho 9, determine um intervalo de 90% de confiança para a resistência média.

5. Num grupo de pacientes, o nível de colesterol é uma variável aleatória com distribuição Normal, de média desconhecida e variância 64 $(mg/ml)^2$.

   (a) Para uma amostra de 46 indivíduos que forneceu nível médio de colesterol de 120 mg/ml, construa o intervalo de confiança de 95%.

   (b) Se você desejasse diminuir a amplitude do intervalo encontrado no item anterior quais seriam suas alternativas?

6. Uma amostra de 10000 itens de uma produção foi inspecionada e o número de defeitos por peça foi registrado na seguinte tabela:

N^o defeitos	0	1	2	3	4
N^o itens	6000	3200	600	150	50

   Chamando de p a proporção de itens defeituosos nessa produção, determinar um intervalo de 98% de confiança para esse parâmetro.

7. Uma amostra aleatória de 100 pessoas de certa região dá 55% como infectados por uma certa bactéria. Determine um intervalo de 95% de confiança para a proporção global de pessoas infectadas pela bactéria.

8. De 1000 casos aleatoriamente selecionados de pacientes com síndrome de Down, 823 sobreviveram aos 30 anos de vida. Construir um intervalo de 95% de confiança para a taxa de sobrevivência correspondente.

9. Uma amostra de 30 dias do número de ocorrências policiais em um certo bairro de uma grande cidade, apresentou os seguintes resultados: 7, 11, 8, 9, 10, 14, 6, 8, 8, 7, 8, 10, 10, 14, 12, 14, 12, 9, 11, 13, 13, 8, 6, 8, 13, 10, 14, 5, 14, e 10. $\overline{x} = 10,07$ e $S = 2,74$. Fazendo as suposições devidas, construa um intervalo de confiança para a proporção de dias *violentos* (com pelo menos 12 ocorrências). $\alpha = 0,05$.

10. Numa pesquisa sobre sedentarismo deseja-se estimar a porcentagem de indivíduos sedentários numa certa população. Numa amostra de 380 indivíduos, 193 são sedentários.

    (a) Identifique e estime pontualmente o parâmetro de interesse.

    (b) Calcule e interprete um intervalo de 95% de confiança para o parâmetro do item anterior.

11. Quando oito pessoas sofreram um episódio não explicado de intoxicação de vitamina D que exigiu hospitalização, foi sugerido que essas ocorrências não usuais poderiam ser resultado de suplementação excessiva de leite. Os níveis de cálcio e albumina no sangue no momento da internação no hospital são exibidos abaixo, junto com os desvios padrões.

	Cálcio (mmol/L)	Albumina (g/L)
$\overline{X}$	3,142	40,375
S	0,5101	3,021

    (a) Quais são as suposições necessárias para o cálculo de intervalos de confiança para cálcio e albumina?

    (b) Construa um intervalo de 95% de confiança para o nível médio verdadeiro de cálcio de indivíduos que sofreram a intoxicação de vitamina D.

    (c) Calcule um intervalo de 95% de confiança para o nível médio verdadeiro de albumina desse grupo.

12. Numa cidade brasileira foi conduzido um estudo para avaliar se qualquer informação que esteja disponível no momento do nascimento poderia ser usada para identificar crianças com alto risco de obesidade. Em uma amostra aleatória de 45 pré-escolares com alto risco de obesidade, quatro tiveram mães com mais de 12 anos de escolaridade. Construa um intervalo de 90% de confiança para a proporção populacional de crianças com alto risco de obesidade cujas mães tiveram mais de 12 anos de escolaridade.

13. As distribuições das pressões arteriais sistólica e diastólica para mulheres entre 30 e 34 anos têm distribuições normais de médias desconhecidas. No entanto, seus desvios padrões são 11,8 mmHg e 9,1 mmHg respectivamente. Uma amostra aleatória de 10 mulheres é selecionada dessa população.

    (a) A pressão arterial sistólica para a amostra é 130 mmHg. Calcule e interprete um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira pressão arterial sistólica média.

    (b) A pressão arterial diastólica média para a amostra de tamanho 10 é 84 mmHg. Encontre e interprete um intervalo de 90% de confiança para a verdadeira pressão arterial diastólica média.

4.3 Teste de hipótese

A maior parte das análises estatísticas envolve comparações entre tratamentos ou procedimentos, ou entre grupos de indivíduos. Existe também a comparação de uma característica de um grupo com um valor numérico *teórico*. Neste último caso, o valor numérico correspondente à comparação de interesse é chamado de *efeito*, porém, quando a comparação é entre dois grupos este efeito, ou diferença de efeitos, pode ser 0, o que significa que não existem diferenças entre os grupos comparados.

Pode se definir uma hipótese, chamada de *hipótese nula*, H_0, que estabelece que o efeito é zero. Adicionalmente, tem-se uma hipótese alternativa, H_1, que pode ser a de que o efeito de interesse não é zero. A definição destas duas hipóteses, que são complementares, é importante já que elas determinarão os critérios para a tomada de decisão.

Todo o procedimento de teste de hipótese está baseado na suposição de que a hipótese nula é verdadeira. Se isto é verdade então espera-se que os dados confirmem a referida hipótese. Caso contrário, o critério de decisão previamente definido levará à rejeição da hipótese nula o que implica na aceitação da hipótese alternativa.

Se o parâmetro de interesse for representado como θ e o efeito como θ_0 então é possível definir uma dentre as 3 opções de hipóteses:

1. H_0: $\theta = \theta_0$ contra H_1: $\theta \neq \theta_0$

2. H_0: $\theta \geq \theta_0$ contra H_1: $\theta < \theta_0$

3. H_0: $\theta \leq \theta_0$ contra H_1: $\theta > \theta_0$

No primeiro caso, a hipótese alternativa é bilateral. Observar que caso a hipótese nula for rejeitada, a hipótese alternativa leva a valores maiores ou menores a θ_0. Nos outros dois casos, existe só uma alternativa, o verdadeiro valor do parâmetro é menor a θ_0, hipótese alternativa unilateral esquerda, ou maior a θ_0, hipótese alternativa unilateral direita.

A definição das hipóteses nula e alternativa demanda cuidado especial devido às consequências da decisão final. É recomendável que esta definição seja feita previamente à coleta dos dados.

Uma vez definidas as hipóteses é necessário um critério para decidir qual das duas é a verdadeira. Este critério deve usar a informação amostral. Nas ciências biomédicas é costume usar o *valor p* como um critério de decisão, podendo ser calculado para qualquer teste. De forma alternativa ao *valor p*, pode ser definido um procedimento baseado na existência de dois tipos de erros, um dos quais é fixado num valor arbitrário levando à definição de um critério para decidir sobre a verdade da hipótese nula. Ambas alternativas são apresentadas a seguir.

4.3.1 Valor p

Tendo estabelecido as hipóteses, avalia-se a *probabilidade de obter os dados observados se a hipótese nula for verdadeira.* Esta probabilidade é chamada de *valor p* e é calculada a partir de uma estatística que é função dos dados e depende do parâmetro em estudo e do teste usado. O critério adotado para tomar uma decisão baseado no uso do *valor p* é o seguinte:

$$\textit{valor } p < 0,05 \implies \begin{cases} \text{Resultado estatisticamente significativo.} \\ \text{Rejeitar } H_0 \end{cases}$$

$$\textit{valor } p > 0,05 \implies \begin{cases} \text{Resultado estatisticamente não-significativo.} \\ \text{Aceitar } H_0 \end{cases}$$

$$\textit{valor } p = 0,05 \implies \text{Não podemos concluir nada.}$$

Um resultado *estatisticamente significativo* deve ser interpretado como a rejeição da hipótese nula.

4.3.2 Erros Tipo I e II

Depois de completado o procedimento de teste de hipótese, que leva a uma decisão sobre a hipótese nula, não existe total certeza sobre se foi tomada a decisão correta. Podem ser observados dois tipos de erro descritos na seguinte tabela:

	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 verdadeira		Erro Tipo I
H_0 falsa	Erro Tipo II	

O erro tipo I aparece quando se rejeita uma hipótese nula que é verdadeira e o erro tipo II é quando se aceita uma hipótese falsa. A probabilidade de cometer erro tipo I é chamada de nível de significância e representada por α, enquanto que β é a probabilidade de cometer erro tipo II. Por outro lado, o poder do teste é definido como a probabilidade de rejeitar uma hipótese falsa, é representado por π e pode ser comprovado que é igual a $1 - \beta$.

4.3.3 Procedimento geral de teste de hipótese

Uma forma alternativa ao *valor p* para a tomada de decisão sobre uma hipótese é dada pelo procedimento geral que apresenta a seguinte sequência de passos:

1. Identificar os parâmetros de interesse e definir H_0 e H_1 mediante uma das três alternativas apresentadas anteriormente.

2. Fixar o valor do nível de significância, α que está associado com o tamanho da região crítica. É costume usar os valores 0,01 ou 0,05. Daqui em diante será adotado o nível de 0,05 sempre que não for definido qualquer outro valor.

3. Definir a estatística de teste, W_{cal}. Para a maioria dos casos estudados aqui, ela será definida em distribuições centradas no valor 0.

4. Definir o critério de rejeição de H_0. Para isto, é necessário levar em consideração a hipótese alternativa.

    - Se H_1 é unilateral esquerda, então a região crítica está representada na figura 4.1 e o critério é *aceitar H_0 se a estatística de teste, W_{cal}, satisfazer a relação $W_{cal} \geq -W_\alpha$.*

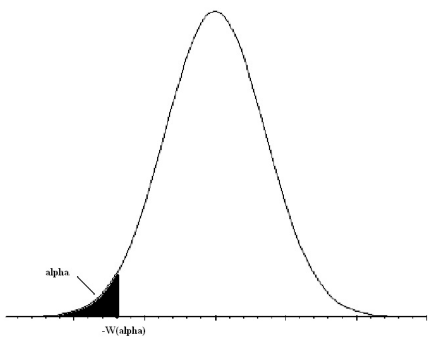

Figura 4.1: Região crítica para uma hipótese alternativa unilateral esquerda.

- Se H_1 é unilateral direita, então a região crítica está representada na figura 4.2 e o critério é *aceitar* H_0 *se a estatística de teste,* W_{cal}*, satisfazer a relação* $W_{cal} \leq W_\alpha$.

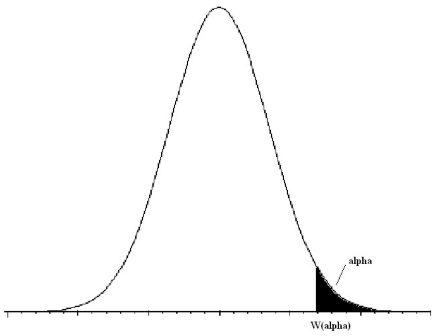

Figura 4.2: Região crítica para uma hipótese alternativa unilateral direita.

- Se H_1 é bilateral, então a região crítica está representada na figura 4.3 e o critério é *aceitar* H_0 *se a estatística de teste,* W_{cal}*, satisfazer a relação* $-W_{\alpha/2} \leq W_{cal} \leq W_{\alpha/2}$.

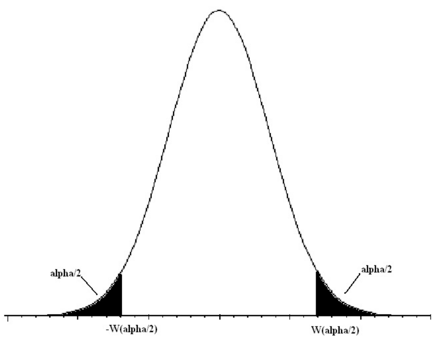

Figura 4.3: Região crítica para uma hipótese alternativa bilateral.

5. Efetuar os cálculos necessários.

6. Tomar uma decisão sobre H_0.

Capítulo 5

Comparação de grupos: dados contínuos

5.1 Teste para a média de um único grupo de observações

A hipótese nula afirma que os dados foram coletados de uma população com distribuição Normal de média hipotética k e variância desconhecida σ^2. De forma geral, as hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu >< k \\ H_1 &: \mu <> k \end{aligned}$$

Sendo assim, a estatística de teste para definir o critério de rejeição e para o cálculo do *valor p* é:

$$t_{cal} = \frac{\overline{x} - k}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

que será confrontada com um valor da distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade. Se a variância da população, σ^2, for conhecida substitui-se S por σ e usa-se a distribuição Normal padrão no lugar da t-Student.

Exemplo: Dispõe-se do consumo diário de energia de 11 mulheres saudáveis e se pretende avaliar se elas estão consumindo, em média, o valor recomendado de 7725 kJ.

Mulher	Consumo diário (kJ)
1	5260
2	5470
3	5640
4	6180
5	6390
6	6515
7	6805
8	7515
9	7515
10	8230
11	8770
Média	6753,6
Des.Pad.	1142,1

As hipóteses a testar são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 7725 \\ H_1 &: \mu \neq 7725 \end{aligned}$$

onde μ representa o consumo médio diário de energia.

Assumindo que os dados têm distribuição Normal pode ser definido o critério de aceitar a hipótese nula se $-2,2281 \leq t_{cal} \leq 2,2281$. O cálculo da estatística de teste é:

$$t_{cal} = \frac{6753,6 - 7725}{1142,1/\sqrt{11}} = -2,821$$

que fica fora da região de aceitação e gera um *valor p* igual a 0,02 para a hipótese bilateral. Tanto a estatística de teste quanto o *valor p* levam à rejeição da hipótese nula, concluindo-se que o consumo médio das mulheres em estudo é significativamente diferente do recomendado.

5.1.1 Teste do sinal e teste de Wilcoxon

Se não existe diferença em média entre os valores amostrais e o valor hipotético deve ser esperado que o número de observações acima e abaixo desse valor seja igual. Esta idéia é usada pelo teste do sinal para testar a hipótese nula.

O teste mencionado anteriormente só leva em conta se uma observação está acima ou abaixo de um valor hipotético, sem levar em consideração a *distância* entre cada valor observado e o valor hipotético. Isto é corrigido pelo teste de Wilcoxon.

Ambos testes, o do sinal e de Wilcoxon, são testes não-paramétricos porque não fazem suposição alguma sobre a distribuição dos dados e são utilizados quando é necessário testar uma média e os dados não apresentam distribuição Normal. De forma geral, estes testes são mais eficientes quando usados em pequenas amostras.

5.2 Teste para as médias de dois grupos de observações pareadas

A hipótese básica é que ambos grupos de observações têm nível médio semelhante. Assume-se, também, que os dados têm distribuição Normal, porém ambos grupos não são independentes. Para dados pareados o interesse está na diferença média entre observações. Estes dados pareados geralmente aparecem quando são realizadas duas medições nos mesmos indivíduos, medições estas que são feitas em dois instantes diferentes ou por dois meios diferentes.

As hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 >< \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 <> \mu_2 \end{aligned}$$

onde μ_1 e μ_2 são as médias populacionais dos grupos 1 e 2.

A estatística de teste será:

$$t = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

onde $\overline{d}$ é a diferença média e S_d é o desvio padrão das diferenças.

Exemplo: A tabela a seguir mostra o consumo energético pré e pós-menstrual de 11 mulheres.

	Consumo diário (kJ)		
Mulher	Pré-menstrual	Pós-menstrual	Diferença
1	5260	3910	1350
2	5470	4220	1250
3	5640	3885	1755
4	6180	5160	1020
5	6390	5645	745
6	6515	4680	1835
7	6805	5265	1540
8	7515	5975	1540
9	7515	6790	725
10	8230	6900	1330
11	8770	7335	1435
Média	6753,6	5433,2	1320,5
Des.Pad.	1142,1	1216,8	366,7

Deseja-se provar que o consumo pré-menstrual é maior. As hipóteses de interesse são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{pré} = \mu_{pós} \\ H_1 &: \mu_{pré} > \mu_{pós}. \end{aligned}$$

onde $\mu_{pré}$ e $\mu_{pós}$ são os consumos médios pré e pós-menstrual. A hipótese de interesse para o exemplo é a alternativa e, assumindo normalidade dos dados, define-se o critério de aceitar a hipótese nula se $t_{cal} \leq 1,8125$. A estatística de teste calculada é:

$$t_{cal} = \frac{1320,5 - 0}{366,7/\sqrt{11}} = 11,94$$

O que leva a rejeitar a hipótese nula, concluindo-se que o consumo pré-menstrual é significativamente maior. O *valor p* é igual a 0,0000002.

5.3 Teste para as médias de dois grupos independentes

Provavelmente as análises estatísticas mais comuns consideram a comparação de dois grupos de observações independentes. O interesse está na diferença média entre grupos, porém, a variabilidade de cada grupo é considerada importante.

Aqui, o teste assume que os dois grupos de observações são obtidos de populações com distribuição Normal e com variâncias semelhantes, caso esta última suposição não for verdadeira terão que ser feitos ajustes na estatística de teste.

As hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 >< \mu_2 \\ H_1 &: \mu_1 <> \mu_2 \end{aligned}$$

onde μ_1 e μ_2 são as médias populacionais dos grupos 1 e 2.

A estatística de teste está definida como:

$$\begin{aligned} t_{cal} &= \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{S_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \\ S_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} &= \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \end{aligned}$$

Neste caso foi feita a suposição de que as variâncias populacionais, mesmo sendo desconhecidas, são semelhantes. Caso esta suposição não for verdadeira a estatística de teste sofrerá alguns ajustes. Isto implica que, no caso de variâncias populacionais desconhecidas, é necessário fazer previamente um teste de hipóteses sobre estas variâncias. Este teste não será apresentado neste texto.

Exemplo: As porcentagens de alfa 2 globulina de 13 pessoas com baixo peso e 9 obesas aparecem na tabela a seguir. Comparar o nível médio desta proteína em ambos os grupos.

	Baixo-peso $n_1 = 13$	Obeso $n_2 = 9$
	6,13	8,79
	7,05	9,19
	7,48	9,21
	7,48	9,68
	7,53	9,69
	7,58	9,97
	7,90	11,51
	8,08	11,85
	8,09	12,79
	8,11	
	8,40	
	10,15	
	10,88	
Média	8,066	10,298
Des.Pad.	1,238	1,398

As hipóteses do problema são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{BP} = \mu_{Obeso} \\ H_1 &: \mu_{BP} \neq \mu_{Obeso}. \end{aligned}$$

onde μ_{BP} e μ_{Obeso} são as porcentagens médias de alfa 2 globulina entre os indivíduos com baixo peso e obesos respectivamente.

Fazendo as suposições de normalidade necessárias tem-se que o critério de decisão sobre a hipótese nula é aceitar H_0 se $-2,0860 \leq t_{cal} \leq 2,0860$. O cálculo da estatística resulta em:

$$t_{cal} = \frac{8,066 - 10,298}{\sqrt{\frac{12 \times 1,238^2 + 8 \times 1,398^2}{13+9-2} \times \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{9}\right)}} = -3,95$$

O *valor p* é $0,0001$ e, assim como pelo critério definido para a estatística t_{cal}, rejeita-se a hipótese de que a porcentagem média de alfa 2 globulina é semelhante entre indivíduos com baixo peso e obesos.

5.3.1 Teste de Mann-Whitney

O teste de Mann-Whitney é análogo ao apresentado anteriormente, porém é utilizado para comparar duas médias independentes quando os dados não têm distribuição Normal. Ele é similar ao teste de Wilcoxon.

5.4 Comparação de mais de duas médias independentes

Uma alternativa para poder comparar mais de duas médias é realizar tantos testes t quanto pares de médias sejam possíveis, porém, existem vários métodos que fazem uma comparação simultânea das médias, entre outros tem-se Newman-Keuls, Duncan, Scheffé, Kruskal-Wallis, cada um com características específicas. Uma alternativa paramétrica é usar a análise de variância (*ANOVA*), que de forma geral permite estudar e identificar a significância do efeito de diversos fatores sobre uma variável resposta. Na sua forma mais simples o teste de ANOVA compara a média de vários grupos que foram definidos por um único fator.

5.5 Testes de normalidade

Os testes desenvolvidos anteriormente supõem que os dados seguem uma distribuição Normal, portanto é necessário testar se esta suposição é verdadeira antes de aplicá-los. Alguns testes que têm por objetivo verificar se os dados seguem uma determinada distribuição, que pode ser a Normal, são: teste χ^2, teste de Kolmogorov-Smirnov, teste de Shapiro-Wilks, teste da divergência de Kullback-Liebler, entre outros.

5.6 Exercícios

1. Para decidir se os habitantes de uma ilha são descendentes da civilização A ou B, irá se proceder da seguinte forma:

   selecionar uma amostra de 100 moradores adultos da ilha, e determinar a altura média deles;

   se essa altura média for superior a 176 cm, será afirmado que são descendentes de B; caso contrário, são descendentes de A.

   Os parâmetros das alturas das duas civilizações são:
   A: $\mu = 175$ e $\sigma = 10$
   B: $\mu = 177$ e $\sigma = 10$
   Defina o erro tipo I e o erro tipo II em função do contexto do problema.

2. Fazendo o teste

$$H_0 : \mu = 1150 \ (\sigma = 150)$$
$$H_1 : \mu = 1200 \ (\sigma = 200)$$

e $n = 100$, estabeleceu-se o critério de rejeitar H_0 se $\overline{X} \geq 1170$. Assumindo normalidade dos dados qual é a probabilidade de rejeitar H_0 quando verdadeira? Qual é a probabilidade de aceitar H_0 quando falsa? Para resolver este exercício, levar em consideração que se se coleta uma amostra aleatória de tamanho n de uma população que tem distribuição normal de média μ e variância σ^2, então a média amostral $\overline{X}$ tem distribuição também normal com a mesma média e variância igual a σ^2/n.

3. O atual tempo de travessia com catamarãs entre Niterói e Rio de Janeiro é considerado uma variável aleatória com distribuição Normal de média 10 minutos e desvio padrão 3 minutos. Uma nova embarcação vai entrar em operação e desconfia-se que será mais lenta que as anteriores, isto é, haverá aumento no tempo médio de travessia.

   (a) Especifique as hipótese em discussão.

   (b) Interprete os erros tipo I e tipo II segundo o problema em estudo.

   (c) Para uma amostra de 20 tempos de travessia com a nova embarcação, obtenha a região crítica como função da média amostral considerando um nível de significância de 0,05, usando o resultado teórico apresentado na questão anterior.

   (d) Calcule β se a nova embarcação demora, em média, 2 minutos a mais que os catamarãs para completar a travessia.

4. Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido em 10 cobaias, que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. O tempo médio foi 9,1 segundos. Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e desvio padrão 2 segundos. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre uma alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são: H_0: as cobaias apresentam tempo de reação padrão; H_1: as cobaias têm o tempo de reação alterado.

   (a) Determine a região crítica, em função da média amostral, para $\alpha = 0,06$.

(b) Calcular β para a média igual a 9,0 segundos como valor da hipótese alternativa.

5. O tempo médio, por funcionário, para executar uma tarefa num restaurante, tem sido 100 minutos, com desvio padrão de 15 minutos. Introduziu-se uma modificação para diminuir esse tempo, e, após certo período sorteou-se uma amostra de 16 funcionários, medindo-se o tempo de execução de cada um. O tempo médio da amostra foi 85 minutos, e o desvio padrão foi 12 minutos. Estes resultados trazem evidências estatísticas da melhora desejada? Conclua para $\alpha = 0,05$.

6. Assumir que o nível mínimo de referência de creatinina em adultos é 0,5 mg/dL. Acredita-se que numa certa população esses níveis sejam inferiores, o que caracteriza deficiência de creatinina. Para testar isto é coletada uma amostra de 46 pessoas que fornecem nível médio de 0,46 mg/dL com desvio padrão 0,02 mg/dL. Assuma que os níveis de creatinina têm distribuição normal para testar a hipótese anterior usando um nível de 0,01.

7. Um estudo foi desenvolvido para avaliar o salário de estagiários em áreas de Nutrição numa cidade brasileira. Foram sorteados e entrevistados 200 estagiários. Admita que o desvio padrão dessa variável na cidade é de 0,8 salários mínimos. Teste, para α=0,05, se a média é igual a 3 salários mínimos, ou menor, se a amostra forneceu média de 2,5 salários mínimos.

8. O tempo médio para completar uma prova de inferência estatística no semestre anterior foi uma hora e trinta minutos com desvio padrão de vinte minutos. Uma turma de 45 alunos deste semestre fez a mesma prova e obteve média de uma hora e sete minutos com desvio padrão de 20,56 minutos. Assumindo que o tempo para completar a prova tem distribuição Normal, prove se a turma deste semestre é significativamente mais rápida. α=0,01.

9. A distribuição da pressão arterial diastólica para a população de mulheres com um determinado distúrbio alimentar tem média desconhecida e desvio padrão igual a 9,1 mmHg. Pode ser útil para os médicos saber se a média desta população é igual à pressão diastólica média da população geral de mulheres, que é 74,4 mmHg.

   (a) Quais são as hipóteses nula e alternativa apropriadas?

   (b) Uma amostra de 10 mulheres com o referido distúrbio tem média 84 mmHg. De posse dessa informação, conduza um teste ao nível 0,05 para as hipóteses do item anterior. Que conclusão você extrai dos resultados do teste?

(c) Sua conclusão teria sido diferente se você tivesse escolhido $\alpha = 0,01$ em vez de 0,05?

10. A porcentagem anual média da receita municipal empregada em alimentação escolar em pequenos municípios de um Estado tem sido 8% (admita que esse índice se comporte segundo um modelo Normal). O governo pretende melhorar esse índice e, para isso, ofereceu alguns incentivos. Para verificar a eficácia dessa atitude, sorteou 10 cidades e observou as porcentagens investidas no último ano. Os resultados foram (em porcentagem) $\overline{x} = 10,6$ e $S = 2,41$. Os dados trazem evidência de melhoria, ao nível de $\alpha = 0,05$? Caso altere a média, calcule um intervalo de 95% de confiança para a nova média.

11. O tempo por semana que as pessoas gastam em redes sociais segue uma distribuição Normal. Existem suspeitas de que os alunos de ciências humanas ficam conectados no *Facebook* mais tempo do que os alunos de ciências biomédicas. Para testar esta hipótese foi feito um estudo de corte transversal que forneceu os seguintes resultados para o tempo semanal, em horas, gasto no referido site:

	N^o alunos	$\overline{X}$	S
Humanas	36	12,5	3,0
Biomédicas	31	10,1	1,2

(a) Estimar o tempo médio semanal gasto no site pelos alunos da área Biomédica usando um intervalo de 98% de confiança.

(b) Testar, para α=0,025, a hipótese levantada sobre o tempo médio semanal nos alunos das duas áreas assumindo que as variâncias dos dois grupos são semelhantes.

12. Para determinar como uma dose experimental de anestesia afeta homens e mulheres, uma amostra de 15 homens e 17 mulheres foi selecionada aleatoriamente em uma clínica odontológica e seus tempos de reação (em minutos) registrados. As seguintes estatísticas resumem os dados:

	Homens	Mulheres
Média	4,8	4,4
Desvio padrão	0,8	0,9

Usando $\alpha = 0,05$, teste se existe diferença significativa entre os tempos de reação de homens e mulheres.

13. Um nutricionista está interessado em saber se há diferença entre os níveis de uma certa proteína do sangue em dois grupos étnicos diferentes. Ele escolhe aleatoriamente 18 indivíduos e compara os níveis da referida proteína na amostra de 10 indivíduos do grupo étnico A e 8 do grupo B. A seguinte tabela fornece os resultados medidos em mol/litro. Com esses dados, testar a hipótese de que não há diferença entre os grupos étnicos no que diz respeito aos níveis da proteína estudada. Quais são as suposições necessárias para realizar o teste?

	Grupo A	Grupo B
Média	4,3	5,0
Desvio padrão	1,49	1,69

14. Oito pacientes com diabete têm medido o nível de glucose no plasma (mmol/l) antes e uma hora depois da administração oral de 100g. de glucose, com os seguintes resultados:

	Glucose no plasma (mmol/l)		
Paciente	Antes	Depois	Mudança
1	4,67	5,44	-0,77
2	4,97	10,11	-5,14
3	5,11	8,49	-3,38
4	5,17	6,61	-1,44
5	5,33	10,67	-5,34
6	6,22	5,67	0,55
7	6,50	5,78	0,72
8	7,00	9,89	-2,89
Média	5,62	7,83	-2,211
D. Padrão	0,838	2,204	2,362

Existem evidências significativas de aumento da glucose?

15. Num exame de leitura em uma escola de ensino fundamental, a nota média de 32 meninos foi 72, com desvio padrão de 8, e a nota média de 36 meninas foi 75, com desvio padrão de 6. Teste a hipótese de que as meninas acusam melhor rendimento na leitura do que os meninos, ao nível de significância de 0,05.

16. Para verificar a importância de uma determinada campanha de propaganda nas vendas de certo produto de uma marca de laticínios foram registradas as vendas semanais antes e depois da referida campanha. Estas vendas aparecem na tabela a seguir. Qual seria sua conclusão sobre a eficiência da campanha? Assumir que as vendas têm distribuição Normal e usar $\alpha = 0,05$.

Loja	Antes	Depois
1	13	16
2	18	24
3	14	18
4	16	14
5	19	26
6	12	17
7	22	29

17. O número de horas extras trabalhadas por 20 funcionários de um frigorífico, antes e depois de implantada uma campanha de incentivos, aparece na tabela a seguir. Diga se a mencionada campanha que otorgava aumento do pagamento das horas extras, conseguiu resultados significativos. Assuma que as horas extras têm distribuição Normal e utilize um nível de significância de 0,05.

	Antes	Depois		Antes	Depois
1	0.4	0.4	11	0.6	12.2
2	0.4	0.5	12	0.7	1.1
3	0.4	0.5	13	0.7	1.2
4	0.4	0.9	14	0.8	0.8
5	0.5	0.5	15	0.9	1.2
6	0.5	0.5	16	0.9	1.9
7	0.5	0.5	17	1.0	0.9
8	0.5	0.5	18	1.0	2.0
9	0.5	0.5	19	1.6	8.1
10	0.6	0.6	20	2.0	3.7

18. Nove indivíduos do sexo masculino, sadios, com idade média de 21 anos participaram voluntariamente de uma pesquisa cujo objetivo era verificar se a *alcalose respiratória, induzida por hiperventilação voluntária*, aumenta a capacidade física avaliada pelo tempo de corrida de 800 metros. Neste estudo, os nove indivíduos participaram da corrida de 800 metros em dois momentos: um deles em condições normais (sem hiperventilação) e no outro após a hiperventilação voluntária. Os dados em segundos estão apresentados a seguir:

	Hiperventilação		
	Com	Sem	Diferença
$\overline{X}$	154,3	153,8	0,5
S	10,2	9,9	4,0

(a) Expresse em termos estatísticos as hipóteses de interesse a serem testadas.

(b) Teste as hipóteses estabelecidas anteriormente ao nível de significância de 0,05. Apresente suas conclusões.

19. Deseja-se comparar a qualidade de um alimento industrializado por dois processos diferentes. Um dos itens avaliados é o comprimento, em centímetros, do referido produto. Com os dados da seguinte tabela você concluiria que os dois processos são semelhantes quanto ao comprimento?

	Processo A	Processo B
n	21	16
$\overline{X}$	21,15	21,12
S	0,203	0,221

20. Um estudo foi conduzido para determinar se a fumaça de cigarro de uma gestante tem efeito no conteúdo mineral ósseo da criança por ela gerada. Uma amostra de 77 recém-nascidos cujas mães fumaram durante a gravidez tem um conteúdo mineral médio ósseo de 0,098 g/cm e desvio padrão 0,026 g/cm; uma amostra de 161 bebês cujas mães não fumavam tem média 0,095 g/cm e desvio padrão 0,025 g/cm. Assumir que os dados têm distribuição normal e as variâncias das populações originais sejam semelhantes.

(a) Estabeleça as hipóteses nula e alternativa para o teste correspondente.

(b) Conduza o teste das hipóteses do item anterior ao nível de significância 0,05. O que se conclui?

Capítulo 6

Comparação de grupos: dados categóricos

Em uma amostra de indivíduos, o número deles que apresenta uma determinada característica é chamado de frequência, mas esta quantidade também pode ser estudada como uma proporção. Assim, inferência sobre dados categóricos pode ser tratada como inferência sobre proporções.

6.1 Uma única proporção

O caso mais simples a se considerar é quando tem-se um único grupo de indivíduos, e observa-se que uma certa proporção apresenta uma característica particular. O que pode ser dito sobre a proporção com essa característica na população? Para responder a isto são definidas as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: p >< p_0 \\ H_1 &: p <> p_0 \end{aligned}$$

onde p é a proporção de indivíduos com a característica de interesse e p_0 é uma constante numérica adequada. É usada uma estatística proveniente da distribuição Normal:

$$z_{cal} = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

desde que o tamanho de amostra seja suficientemente grande. Diversos autores consideram $n \geq 30$.

Exemplo: Supor que uma residente escolheu uma amostra de 215 mulheres entre as tratadas pela unidade onde ela trabalha, e achou 39 casos com histórico de asma. Ela deseja usar esta evidência para testar a hipótese de que a prevalência de asma em mulheres é de 15%. Assim, as hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,15 \\ H_1 &: p \neq 0,15 \end{aligned}$$

onde p é a proporção de mulheres com asma, aqui chamada de prevalência. Neste problema, o critério leva a aceitar H_0 se $-1,96 \leq z_{cal} \leq 1,96$. A estatística de teste é:

$$z_{cal} = \frac{\frac{39}{215} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{215}}} = 1,23$$

levando a aceitar a hipótese inicial de que a prevalência de mulheres com asma é de 15%. O *valor p* é 0,22.

6.2 Proporções em dois grupos independentes

Quando se deseja comparar a proporção de indivíduos com uma característica em duas populações independentes, as hipóteses têm a forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: p_1 >< p_2 \\ H_1 &: p_1 <> p_2 \end{aligned}$$

e a estatística usada nesta situação é:

$$\begin{aligned} z_{cal} &= \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p} \times (1 - \widehat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim N(0,1) \\ \widehat{p} &= \frac{r_1 + r_2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

sendo r_1 e r_2 o número de vezes que se observa a característica de interesse nas amostras dos grupos 1 e 2, $\widehat{p}_1$ e $\widehat{p}_2$ as proporções observadas nas amostras 1 e 2.

Exemplo: Os dados vêm de um ensaio clínico que compara a estimulação por infra-vermelho (IRS) com um placebo (estimulação elétrica transcutânea simulada) na dor causada por osteoartrose cervical, sem identificação, pelo paciente, do tratamento recebido. Participaram do ensaio 250 pacientes. Dos 120 pacientes no grupo IRS, 90 deles relataram melhora na dor, comparado com os 40 dentre os 130 que receberam o placebo. Testar se existem diferenças atribuídas à estimulação.

As hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: p_{IRS} = p_{Placebo} \\ H_1 &: p_{IRS} > p_{Placebo} \end{aligned}$$

onde p_{IRS} e $p_{Placebo}$ são as proporções de pacientes que relataram melhora na dor nos grupos IRL e placebo. A hipótese nula será aceitada se $z_{cal} \leq 1,64$. A estatística de teste é:

$$\begin{aligned} z_{cal} &= \frac{\frac{90}{120} - \frac{40}{130}}{\sqrt{0,52 \times 0,48 \times \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{130}\right)}} = 2,21 \\ \text{sendo } \widehat{p} &= \frac{90+40}{120+130} = 0,52 \end{aligned}$$

com a qual rejeta-se a hipótese nula, concluindo que a proporção de pacientes que relatam melhora na dor é significativamente maior no grupo IRL. O *valor p* é igual a 0,014.

6.3 Duas proporções em amostras pareadas

Neste caso o interesse continua sendo a comparação de duas proporções, de forma que as hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: p_1 >< p_2 \\ H_1 &: p_1 <> p_2 \end{aligned}$$

Porém, para comparar duas proporções para dados pareados é necessário obter informação adicional que pode ser resumida no seguinte quadro:

Característica observada		Número de
Amostra 1	Amostra 2	pares
Sim	Sim	a
Sim	Não	b
Não	Sim	c
Não	Não	d

A estatística de teste está definida como:

$$z_{cal} = \frac{b-c}{\sqrt{b+c}}$$

onde b é o número de vezes que foi observada a característica na amostra 1 e não foi observada na amostra 2 e c é o número de vezes que não foi observada a característica na amostra 1 e foi observada na amostra 2.

Exemplo: Em um estudo para avaliar dois reagentes para um exame clínico que detecta uma toxina foram coletadas amostras de sangue de 105 pessoas portadoras da referida toxina. Cada amostra é subdividida em duas e cada uma destas recebe um único reagente, anotando se houve ou não reação positiva. Os resultados aparecem a seguir:

	Reagente 1	
Reagente 2	Positivo	Negativo
Positivo	51	6
Negativo	15	33

Existem diferenças entre as proporções de reações positivas para os dois reagentes?

As hipóteses são:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: p_1 = p_2 \\
H_1 &: p_1 \neq p_2
\end{aligned}
$$

onde p_1 e p_2 são as proporções de reações positivas para os reagentes 1 e 2 respectivamente. Estas proporções são também conhecidas como *sensibilidades*. O critério é aceitar a hipótese nula se $-1,96 \leq z_{cal} \leq 1,96$. A estatística de teste é

$$
z = \frac{15-6}{\sqrt{15+6}} = 1,964
$$

que leva a rejeitar a hipótese nula, resultando num *valor p* de 0,0495.

6.4 Teste χ^2

Este teste tem diversos usos, o mais comum é para comprovar a relação existente entre dois fatores em tabelas de duas entradas. Em uma tabela $2 \times k$ ($k > 2$) ele permite comparar as proporções de indivíduos com uma característica de interesse nos k grupos definidos na tabela; caso a hipótese nula de igualdade das proporções for aceita conclui-se que a característica de interesse não está relacionada com o fator que determinou os k grupos, o que implica que eles são independentes. Este teste utiliza a distribuição χ^2.

As hipóteses possíveis são:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: p_1 = p_2 = \cdots = p_k \\
H_1 &: \text{pelo menos uma proporção é diferente}
\end{aligned}
$$

ou, de forma geral para uma tabela $l \times k$,

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{Os fatores que determinam linhas e} \\
&\quad \text{colunas são independentes} \\
H_1 &: \text{Existe alguma relação entre os fatores.}
\end{aligned}
$$

Como exemplo desta utilização do teste χ^2, será estudada a relação entre o estado civil e o consumo de cafeína em 3888 homens cujos resultados aparecem a seguir:

Estado civil	Consumo de cafeína (mg/dia) 0	1-150	151-300	> 300	Total
Casado	652	1537	598	242	3029
Divorciado, separado ou viúvo	36	46	38	21	141
Solteiro	218	327	106	67	718
Total	906	1910	742	330	3888

É necessário calcular as frequências esperadas para cada um dos valores na tabela. Para os casados sem consumo diário de cafeína esta frequência é calculada como:

$$\frac{3029 \times 906}{3888} = 705,8.$$

Esta conta é feita para todos os elementos da tabela observada e permite obter a seguinte tabela de frequências esperadas:

Estado civil	Consumo esperado de cafeína (mg/dia) 0	1-150	151-300	> 300	Total
Casado	705,8	1488,0	578,1	257,1	3029
Divorciado, separado ou viúvo	32,9	69,3	26,9	12,0	141
Solteiro	167,3	352,7	137,0	60,9	718
Total	906	1910	742	330	3888

Com estas duas tabelas é calculada a estatística de teste que, de forma geral, é:

$$\chi^2_{cal} = \sum \frac{(Observado - Esperado)^2}{Esperado} \sim \chi^2\left((r-1)\times(c-1)\right)$$

onde *Observado* é o valor realmente observado obtido da primeira tabela e $Esperado$ é o correspondente valor de frequência esperada, r é o número de linhas na tabela e c é o número de colunas.

Para o exemplo, o critério de decisão é de aceitar a hipótese nula de independência entre estado civil e consumo de cafeína se $\chi^2_{cal} \leq 12,5916$. Com $\chi^2_{cal} = 51,61$ que, com 6 graus de liberdade gera um *valor p* igual a 0,000000002, conclui-se que existem evidências da relação entre o estado civil e o consumo de cafeína.

6.5 Exercícios

1. Deseja-se provar a hipótese de que a proporção de hipertensos é menor entre os pacientes em uso de um novo medicamento, chamado *Redutopril*, comparados com os que usam o medicamento líder do mercado chamado *Hiperpril*. Em função do problema apresentado defina:

   (a) As hipóteses nula e alternativa.

   (b) Erros tipo I e II.

2. Testes exaustivos realizados por uma indústria de fabricação de fornos para padarias indicam que seu forno de microondas tem probabilidade 0,1 de apresentar a primeira falha antes de 900 horas de uso. Um novo método de produção está sendo implantado e os engenheiros garantem que a probabilidade acima indicada deve diminuir. Com o objetivo de verificar essa afirmação, escolheu-se aleatoriamente 100 aparelhos para realizar testes acelerados e os resultados indicaram que 8 deles tiveram sua primeira falha antes de 900 horas. Formule as hipóteses adequadas e verifique se os engenheiros têm razão, considerando um nível de significância de 0,05.

3. Os produtores de um programa de culinária na TV pretendem modificá-lo se for assistido regularmente por menos de um quarto dos telespectadores. Uma pesquisa encomendada a uma empresa especializada entrevistou 400 famílias e adotou o critério de rejeitar a hipótese nula de não-alteração do programa caso a proporção amostral de famílias telespectadoras seja menor a 0,2. Sabendo que, para n suficientemente grande, tem-se que $\widehat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$.

   (a) Calcular o nível de significância do teste.

   (b) Calcular o poder da prova se, na verdade, a proporção é igual a 0,15.

4. O consumidor de um certo produto acusou o fabricante, dizendo que mais de 20% das unidades fabricadas apresentam defeito. Para confirmar sua acusação ele usou uma amostra de tamanho 50, onde 27% das peças eram defeituosas. Mostre se estas evidências amostrais confirmam a acusação do consumidor. Utilize $\alpha = 0,05$.

5. Assumir que um procedimento de diminuição do peso é considerado aceitável se pelo menos 80% dos indivíduos conseguem diminuir 10% de seu peso em 90 dias. Um pesquisador submete 480 pessoas a um novo procedimento e obtém o resultado desejado em 360 pessoas.

(a) Identificar e estimar o parâmetro de interesse.

(b) Testar, ao nível de 0,05, a hipótese de que o novo procedimento de diminuição do peso é aceitável.

6. Uma empresa de comercialização de alimentos promoveu um curso *novo e melhorado* destinado a treinar seu pessoal de vendas. Foram escolhidos 100 candidatos que foram divididos em dois grupos : 50 frequentaram o curso usual e 50 frequentaram o curso novo. Ao fim de 6 semanas, todos os 100 candidatos foram submetidos ao mesmo exame final. Teste a hipótese de que o novo curso não apresentou mudança alguma em relação ao curso usual no que diz respeito ao treinamento do pessoal de vendas. O que seus resultados indicam?

Habilidades	Usual	Novo/melhorado
Acima média	15	19
Média	25	23
Abaixo média	10	8

7. O fabricante de um determinado remédio alega que o mesmo acusou 90% de eficiência em aliviar a alergia por um período de 8 horas. Em uma amostra de 200 indivíduos que sofriam de alergia, o remédio deu resultado positivo em 160. Determine se a alegação do fabricante é legítima. Use $\alpha = 0,01$.

8. Um pesquisador está interessado na diferença de sexos com relação a opinião sobre adicionar antioxidantes nos alimentos comercializados por certa empresa. Pesquisando uma amostra de 100 homens e 80 mulheres, constatou que 36% dos homens e 40% das mulheres são favoráveis à referida adição. Teste a significância da diferença entre os sexos com relação a adicionar antioxidantes nos referidos alimentos.

9. Um estudo foi conduzido para avaliar a eficâcia relativa de suplementação com cálcio *versus* o calcitrol (agente que aumenta a absorção gastrointestinal do cálcio), no tratamento da osteoporose depois da menopausa. Várias pacientes retiraram-se prematuramente desse estudo, devido aos efeitos adversos do tratamento. Os dados relevantes sobre a retirada da pesquisa aparecem abaixo:

	Retirada		
Tratamento	Sim	Não	Total
Calcitrol	27	287	314
Cálcio	20	288	308
Total	47	575	622

(a) Calcule a proporção da amostra de pacientes que se retiram do estudo em cada grupo de tratamento.

(b) Teste a hipótese nula de que não há associação entre o grupo de tratamento e sua retirada do estudo ao nível de 0,05.

10. Suspeita-se que exista relação entre a dificuldade de aprendizagem de crianças em idade escolar e a prematuridade ao nascer. Para testar esta hipótese foram coletadas informações de 52 crianças na referida faixa etária, obtendo-se os seguintes resultados:

	Dificuldade de aprendizagem		
	Muita	Normal	Facilidade
Prematuro	5	2	7
Não-prematuro	1	31	6

A suspeita é confirmada pelos dados coletados? Usar α=0,01.

11. A pedido de um laboratório químico, dois métodos de diagnóstico de um distúrbio neurológico chamados A e B e considerados baratos, são avaliados em 70 pacientes sabidamente portadores do distúrbio, obtendo-se os seguintes resultados:

	Diagnóstico B	
Diagnóstico A	Positivo	Negativo
Positivo	40	15
Negativo	10	5

Como o laboratório requerente produz o kit de diagnóstico A, ele afirma que o seu kit é mais sensível. A afirmação do laboratório é confirmada pelas evidências amostrais? Usar α=0,05.

12. Setenta e cinco camundongos recebem uma droga que estimula a absorção de um determinado nutriente no intestino, e outros setenta e cinco não a recebem. Depois de 25 dias de alimentação, todos os camundongos são analizados com relação ao nível de absorção intestinal do referido nutriente, sendo classificados em *absorção completa* ou *absorção parcial*, obtendo-se os seguintes resultados:

Absorção	Com droga	Sem droga
Completa	60	51
Parcial	15	24
Total	75	75

Prove se a droga aumenta a habilidade dos camundongos para conseguir absorção completa do nutriente, $\alpha = 0,05$.

13. Num torneio de voleibol, a recuperação energética dos jogadores após uma partida é importante. Um grupo de nutricionistas desenvolveu um cardápio com o objetivo de melhorar a referida recuperação. Foram observados 68 times submetidos ao referido cardápio e 85 sem tratamento especial obtendo-se os seguintes resultados:

Recuperação	Cardápio especial	
energética	Sim	Não
Conseguiram	53	42
Não conseguiram	15	43

Testar, para um nível de 0,05, a eficiência do trabalho dos nutricionistas.

14. Cinquenta amostras de saliva sabidamente positivas para o bacilo da tuberculose foram colocadas em duas diferentes culturas ou meios de detecção (A e B). O objetivo do experimento era a comparação destes meios na detecção do bacilo. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo:

Meio A	Meio B	
	Detectou	Não detectou
Detectou	20	12
Não detectou	2	16

Existe evidência de que os meios ou culturas sejam diferentes? ($\alpha = 0,05$)

15. Numa pesquisa de opinião pública 1000 homens e 1000 mulheres foram entrevistados sobre a posição acerca do aborto. Entre as mulheres 356 manifestaram-se contra a legalização do aborto, enquanto que 515 homens tiveram a mesma posição. Existe diferença significativa entre os dois sexos quanto à opinião sobre a legalização do aborto? ($\alpha = 0,05$)

16. Para estudar as dificuldades de dormir dos usuários de maconha, foi planejado o seguinte experimento: 64 pessoas foram colocados para dormir separadas em duplas, cada dupla em um quarto, de forma que estas foram formadas por um usuário de maconha e um não usuário, chamado de *controle*, foi registrado se cada indivíduo teve, ou não, dificuldades para dormir. Usando os dados a seguir, prove se existem evidências de que a porcentagem de usuários de maconha com dificuldades para dormir é maior do que no grupo *controle*. Use α=0,05.

Dificuldades para dormir		
Grupo *Maconha*	Grupo *Controle*	Número de duplas
Sim	Sim	4
Sim	Não	3
Não	Sim	9
Não	Não	16

17. Observou-se nos anos 60 que a ocorrência de abortos espontâneos nas gestações de médicas anestesistas era mais alta do que o normal. Para verificar se esta observação refletia ou não uma condição geral, realizou-se em 1970 um estudo em um hospital universitário. Foram encontrados os seguintes resultados:

Quadro	Especialidade		
	Anestesista	Outra	Total
Gestação normal	23	52	75
Aborto espontâneo	14	6	20
Total	37	58	95

    (a) Escolha a hipótese nula e a alternativa que sejam razoáveis nesta situação.

    (b) Faça o teste adequado considerando um nível de significância de 0,05. Qual é sua conclusão?

18. Uma consulta a 300 eleitores do distrito A e 200 eleitores do distrito B acusou 56% e 48%, respectivamente, a favor de determinado candidato. Para $\alpha = 0,05$, teste a hipótese de que:

    (a) não exista diferença entre os dois distritos,

    (b) o candidato tenha preferência maior no distrito A.

19. Um radialista, considerando uma alteração na programação de sua emissora, coleta dados sobre as preferências de vários grupos etários de ouvintes. Com a seguinte tabulação cruzada, teste a hipótese de que a preferência pelo tipo de programa não difere por grupo etário.

Preferência	Jovem	Meia-idade	Adulto mais velho
Música	14	10	3
Noticiário	4	15	11
Esporte	7	9	5

20. Um nutricionista que implementou o Manual de Boas Práticas em 3 restaurantes deseja conhecer se houve diferenças nas melhoras perceptíveis decorrentes do uso do manual nos 3 restaurantes. Para isto entrevista amostras independentes de freqentadores dos 3 restaurantes perguntando se eles estão satisfeitos com as mudanças ocorridas. Os resultados obtidos aparecem na seguinte tabela:

	Satisfeitos	Insatisfeitos
Rest. 1	50	50
Rest. 2	80	20
Rest. 3	40	60

(a) Defina as hipóteses necessárias.

(b) Teste para um nível de 0,05 as hipóteses do item anterior.

Apêndice A

Respostas selecionadas

(Cap. 1) **3** (a) Categórico nominal. (b) Numérico discreto (dias, meses). (c) Numérico discreto. (d) Categórico nominal se as observações são baixo, médio e alto, numérico se são consideradas as medições. (e) Categórico dicotômico. (f) Numérico contínuo.

4 Estudo experimental.

5 Estudo observacional de corte transversal.

(Cap. 2) **5** S = 0,623 e Me =2,82.

6 (a) Variável numérica contínua. (b) Estudo observacional de corte transversal. (c) Me = 3371,9 g, $\overline{X}$ = 3349,5 g. (d) S = 615,1 g.

7 (b) Me = 195.

8 (a) Número de quilômetros que os pacientes conseguem caminhar. Variável numérica contínua. (b) Média = 4,79 km. (c) Me = 3,65 km. (d) S = 3,63 km.

9 (a) Dado censurado. (c) $\overline{X}$ =1046,76 Me = 960.

(Cap. 3) **1** (a) 0,0. (b) 0,8. (c) 0,0 (d) 0,7.

2 (a) 0,85. (b) 0,45. (c) 0,9. (d) 0,2.

3 0,75.

5 (a) 0,89. (b) 0,95. (c) 0,28. (d) 0,50.

6 (a) 0,34. (b) 0,18.

7 0,73.

11 (a) 0,004661. (b) 0,954467. (c) -0,84.

13 (a) 0,072145. (b) 0,796498.

14 (a) 0,02275. (b) 0,9545.

(Cap. 4) **1** $Conf(148,37 \leq \mu \leq 151,63) = 95\%$.

2 $Conf(7,22 \leq \mu \leq 7,78) = 95\%$.

3 $Conf(23,28 \leq \mu \leq 24,52) = 99\%$.

4 $Conf(5,52 \leq \mu \leq 6,88) = 90\%$.

5 (a) $Conf(117,68 \leq \mu \leq 122,32) = 95\%$. (b) Aumentar n ou diminuir o nível de confiança.

6 $Conf(0,3886 \leq p \leq 0,4114) = 98\%$.

7 $Conf(0,4525 \leq p \leq 0,6475) = 95\%$.

8 $Conf(0,7992 \leq p \leq 0,8468) = 95\%$.

9 $Conf(0,162 \leq p \leq 0,495) = 95\%$.

(Cap. 5) **2** $\alpha = 0,091759$ e $\beta = 0,066807$.

3 (a) $H_0 : \mu = 10$, $H_1 : \mu > 10$. (b) Erro tipo I: Afirmar que a embarcação será mais lenta quando na verdade é tão rápida quanto a anterior. Erro tipo II: Afirmar que a embarcação será tão rápida quanto a anterior quando na verdade é mais lenta. (c) Rejeitar H_0 se $\overline{X} > 11,31$. (d) 0,151505.

4 (a) Região crítica: $\overline{X} > 9,19$ ou $\overline{X} < 6,81$. (b) 0,617641.

5 Rejeitar H_0.

7 Rejeitar H_0.

8 Rejeitar H_0.

9 (a) $H_0 : \mu = 74,4$, $H_1 : \mu \neq 74,4$. (b) Rejeitar H_0. (c) Não.

10 Rejeitar H_0. $Conf(8,876 \leq \mu \leq 12,324) = 95\%$.

11 (a) $Conf(9,56 \leq \mu \leq 10,64) = 98\%$. (b) Rejeitar H_0.

12 Aceitar H_0.

14 Aceitar H_0.

15 Rejeitar H_0.

16 Rejeitar H_0.

17 Rejeitar H_0.

(Cap. 6) **2** Aceitar H_0.

3 (a) 0,010444. (b) 0,997445.

4 Aceitar H_0.

5 (a) $\widehat{p} = 0,75$. (b) Rejeitar H_0.

6 Aceitar H_0.

7 Rejeitar H_0.

8 Aceitar H_0.

10 Rejeitar H_0.

11 Aceitar H_0.

12 Rejeitar H_0.

14 Rejeitar H_0.

15 Rejeitar H_0.

16 Aceitar H_0.

17 (a) $H_0 : p_a \leq p_o$, $H_1 : p_a > p_o$. (b) Rejeitar H_0.

18 (a) Aceitar H_0. (b) Aceitar H_0.

19 Rejeitar H_0.

Apêndice B

Distribuição Normal padrão $N(0;1)$

As probabilidades fornecidas nas tabelas são da forma: $\alpha = P(0 \leq Z < z_\alpha)$.

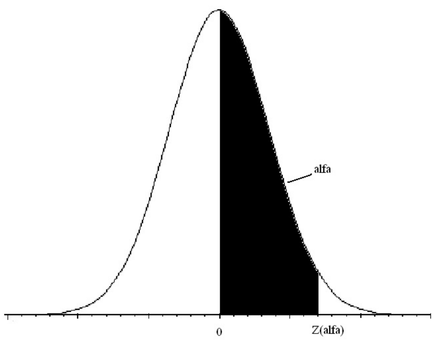

Figura B.1: Probabilidades fornecidas pelas tabelas da distribuição Normal padrão.

z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,000000	0,003989	0,007978	0,011967	0,015953
0,1	0,039828	0,043795	0,047758	0,051717	0,055670
0,2	0,079260	0,083166	0,087064	0,090954	0,094835
0,3	0,117911	0,121719	0,125516	0,129300	0,133072
0,4	0,155422	0,159097	0,162757	0,166402	0,170031
0,5	0,191462	0,194974	0,198468	0,201944	0,205402
0,6	0,225747	0,229069	0,232371	0,235653	0,238914
0,7	0,258036	0,261148	0,264238	0,267305	0,270350
0,8	0,288145	0,291013	0,293892	0,296731	0,299546
0,9	0,315940	0,318589	0,321214	0,323814	0,326391
1,0	0,341345	0,343752	0,346136	0,348495	0,350830
1,1	0,364334	0,366500	0,368643	0,370762	0,372857
1,2	0,384930	0,386860	0,388767	0,390651	0,392512
1,3	0,403199	0,404902	0,406582	0,408241	0,409877
1,4	0,419243	0,420730	0,422196	0,423641	0,425066
1,5	0,433193	0,434478	0,435744	0,436992	0,438220
1,6	0,445201	0,446301	0,447384	0,448449	0,449497
1,7	0,455435	0,456367	0,457284	0,458185	0,459071
1,8	0,464070	0,464852	0,465621	0,466375	0,467116
1,9	0,471284	0,471933	0,472571	0,473197	0,473810
2,0	0,477250	0,477784	0,478308	0,478822	0,479325
2,1	0,482136	0,482571	0,482997	0,483414	0,483823
2,2	0,486097	0,486447	0,486791	0,487126	0,487455
2,3	0,489276	0,489556	0,489830	0,490097	0,490358
2,4	0,491802	0,492024	0,492240	0,492451	0,492656
2,5	0,493790	0,493963	0,494132	0,494297	0,494457
2,6	0,495339	0,495473	0,495603	0,495731	0,495855
2,7	0,496533	0,496636	0,496736	0,496833	0,496928
2,8	0,497445	0,497523	0,497599	0,497673	0,497744
2,9	0,498134	0,498193	0,498250	0,498305	0,498359
3,0	0,498650	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817
3,1	0,499032	0,499064	0,499096	0,499126	0,499155
3,2	0,499313	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402
3,3	0,499517	0,499533	0,499550	0,499566	0,499581
3,4	0,499663	0,499675	0,499687	0,499698	0,499709
3,5	0,499767	0,499776	0,499784	0,499792	0,499800
3,6	0,499841	0,499847	0,499853	0,499858	0,499864
3,7	0,499892	0,499896	0,499900	0,499904	0,499908
3,8	0,499928	0,499930	0,499933	0,499936	0,499938
3,9	0,499952	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959
4,0	0,499968	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973
z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04

z_α	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,199939	0,023922	0,027903	0,031881	0,035856
0,1	0,059618	0,063559	0,067495	0,071424	0,075345
0,2	0,098706	0,102568	0,106420	0,110261	0,114092
0,3	0,136831	0,140576	0,144309	0,148027	0,151732
0,4	0,173645	0,177242	0,180822	0,184386	0,187933
0,5	0,208840	0,212260	0,2155661	0,219043	0,222405
0,6	0,242154	0,245373	0,248571	0,251748	0,254903
0,7	0,273373	0,276373	0,279350	0,282305	0,285236
0,8	0,302338	0,305106	0,307850	0,310570	0,313267
0,9	0,328944	0,331472	0,333977	0,336457	0,338913
1,0	0,353141	0,355428	0,357690	0,359929	0,362143
1,1	0,374928	0,376976	0,378999	0,381000	0,382977
1,2	0,394350	0,396165	0,397958	0,399727	0,401475
1,3	0,411492	0,413085	0,414656	0,416207	0,417736
1,4	0,426471	0,427855	0,429219	0,430563	0,431888
1,5	0,439429	0,440620	0,441792	0,442947	0,444083
1,6	0,450529	0,451543	0,452540	0,453521	0,454486
1,7	0,459941	0,460796	0,461636	0,462462	0,463273
1,8	0,467843	0,468557	0,469258	0,469946	0,470621
1,9	0,474412	0,475002	0,475581	0,476148	0,476705
2,0	0,479818	0,480301	0,480774	0,481237	0,481691
2,1	0,484222	0,484614	0,484997	0,485371	0,485738
2,2	0,487776	0,488089	0,488396	0,488696	0,488989
2,3	0,490613	0,490863	0,491106	0,491344	0,491576
2,4	0,492857	0,493053	0,493244	0,493431	0,493613
2,5	0,494614	0,494766	0,494915	0,495060	0,495201
2,6	0,495975	0,496093	0,496207	0,496319	0,496427
2,7	0,497020	0,497110	0,497197	0,497282	0,497365
2,8	0,497814	0,497882	0,497948	0,498012	0,498074
2,9	0,498411	0,498462	0,498511	0,498559	0,498605
3,0	0,498856	0,498893	0,498930	0,498965	0,498999
3,1	0,499184	0,499211	0,499238	0,499264	0,499289
3,2	0,499423	0,499443	0,499462	0,499481	0,499499
3,3	0,499596	0,499610	0,499624	0,499638	0,499650
3,4	0,499720	0,499730	0,499740	0,499749	0,499758
3,5	0,499807	0,499815	0,499821	0,499828	0,499835
3,6	0,499869	0,499874	0,499879	0,499883	0,499888
3,7	0,499912	0,499915	0,499918	0,499922	0,499925
3,8	0,499941	0,499943	0,499946	0,499948	0,499950
3,9	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,499974	0,499975	0,499976	0,499977	0,499978
z_α	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Apêndice C

Distribuição t-Student

As probabilidades fornecidas nas tabelas são da forma: $\alpha = P(T < t_\alpha)$.

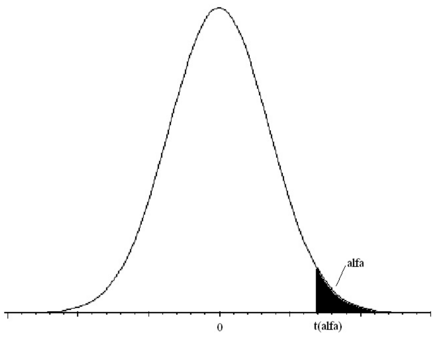

Figura C.1: Probabilidades fornecidas pelas tabelas da distribuição t-Student.

G.L.	α 0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408
4	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
35	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045
45	1,3007	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387
90	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259
1000	1,2824	1,6464	1,9623	2,3301	2,5807
G.L.	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
			α		

Apêndice D

Distribuição χ^2

As probabilidades fornecidas nas tabelas são da forma: $\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha)$.

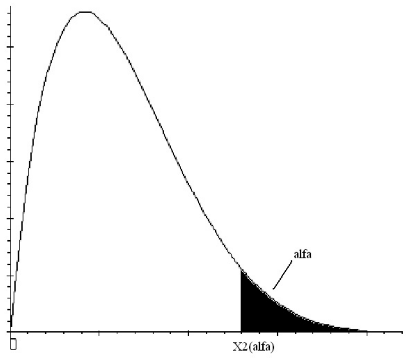

Figura D.1: Probabilidades fornecidas pelas tabelas da distribuição χ^2.

	α						
G.L.	0,25	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,3233	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794
2	2,7726	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2104	10,5965
3	4,1083	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8381
4	5,3853	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	14,8602
5	6,6257	7,2893	9,2363	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	7,8408	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5475
7	9,0371	9,8032	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	10,2189	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9549
9	11,3887	12,2421	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893
10	12,5489	13,4420	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1881
11	13,7007	14,6314	17,2750	19,6752	21,9200	24,7250	26,7569
12	14,8454	15,8120	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2997
13	15,9839	16,9848	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8193
14	17,1169	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3194
15	18,2451	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5780	32,8015
16	19,3689	20,4651	23,5418	26,2962	28,8453	31,9999	34,2671
17	20,4887	21,6146	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7184
18	21,6049	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8052	37,1564
19	22,7178	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5821
20	23,8277	25,0375	28,4120	31,4104	34,1696	37,5663	39,9969
21	24,9348	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	41,4009
22	26,0393	27,3015	30,8133	33,9245	36,7807	40,2894	42,7957
23	27,1413	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6383	44,1814
24	28,2412	29,5533	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	45,5584
25	29,3388	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3140	46,9280
26	30,4346	31,7946	35,5632	38,8851	41,9231	45,6416	48,2898
27	31,5284	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9628	49,6450
28	32,6205	34,0266	37,9159	41,3372	44,4608	48,2782	50,9936
29	33,7109	35,1394	39,0875	42,5569	45,7223	49,5878	52,3357
30	34,7997	36,2502	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	53,6719
35	40,2228	41,7780	46,0588	49,8018	53,2033	57,3420	60,2746
40	45,6160	47,2685	51,8050	55,7585	59,3417	63,6908	66,7660

Referências Bibliográficas

[1] Altman,D. (1991), *Practical Statistics for Medical Research*, Chapman & Hall, London.

[2] Bussab,W., Morettin,P. (2005), *Estatística Básica*, Editora Saraiva, São Paulo.

[3] Díaz,F.R., López,F.J.B. (2007), *Bioestatística*, Thomson, São Paulo.

[4] Morettin,L.G. (2000), *Estatística Básica, Volume 1 (Probabilidade) e Volume 2 (Inferência)*, Makron Books, São Paulo.

[5] Pagano,M., Gauvreau,K. (2000), *Princípios de Bioestatística*, Thomson, São Paulo.

[6] Soares,J., Siqueira,A.L. (2002), *Introdução à Estatística Médica*, COOPMED Editora Médica, Belo Horizonte.